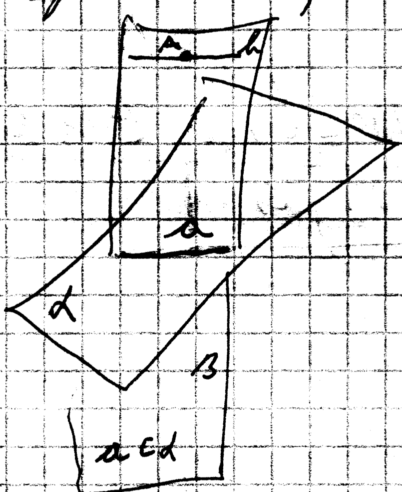
GLAVA V

Aksioma paralelnosti: Euklidska geometrija

Aksioma paralelnosti

U glavi tri dokazali smo sljedeću teoremu:
Neka su prave AB i $A'B'$ presječene trećom pravom p tako da je $\{P\} = AB \cap p$, $\{P'\} = A'B' \cap p$ i tačke ~~Q~~ $Q, Q' \in PP'$ i $Q \cdot P \cdot P'$, $P \cdot P' \cdot Q'$. Ako je $\sphericalangle QPB \cong \sphericalangle PP'B'$ ili $\sphericalangle APP' \cong \sphericalangle B'P'P$ ili vrijedi $\sphericalangle BPP' + \sphericalangle B'P'P =$ ravan ugao tj. ako su

kongruentni saglasni uglovi ili ako su kongruentni
naizmjenični uglovi ili ako je zbir suprotnih
uglova jednak ravnom uglu onda vrijedi
$\underline{AB} \cap \underline{A'B'} = \emptyset$. Dakle već na osnovu prve tri
grupe aksioma i njihovih posljedica mi smo
dokazali sljedeću teoremu: Za svaku pravu a
i za svaku tačku (A koja) $A \notin a$ postoji prava
b koja sadrži tačku A a ne siječe pravu a.
Dakle egzistencija dvije komplanarne prave čiji
je presjek prazan skup je posljedica prve
tri grupe aksioma. Mi ćemo dokazati i egzis-
tenciju prave i ravni čiji je presjek prazan
opet kao posljedicu prve tri grupe aksioma.
Uočimo ravan α i tačku A koja ne pripada α.
Neka je a proizvoljna prava u ravni α.



Prava a i tačka A određuju neku ravan B
u kojoj ravni B postoji prava b koja sadrži
tačku A a ne siječe pravu a tj. za koju
vrijedi $b \cap a = \emptyset$. Tada je pogotovo $b \cap \alpha = \emptyset$.
Također smo dokazali teoremu:
Za svaku pravu a i za svaku tačku A postoji

jedna i samo jedna ravan α koja sadrži tačku A i normalna je na a. Kao posljedicu te teorem e imamo: presjek dvije ravni od kojih je svaka normalna na istu pravu je prazan skup. Prema tome i egzistencija dvije ravni čiji je presjek ~~dvije ravni~~ prazan skup je posljedica prve tri grupe aksioma. Vratimo se slučaju u ravni. Još od doba starih grka pa sve do 19 vijeka postavljalo se pitanje koliko je pravih koje sadrže tačku A a ne sijeku pravu a. Tek je u 19 vijeku postalo jasno da se ovaj problem nemože riješiti na osnovu do tada poznatih aksioma i njihovih posljedica. Problem je riješen tako što je uvedena nova aksioma - aksioma paralelnosti. To je aksioma koja čini V grupu aksioma. Ona je posljednja aksioma Hilbertovog sistema aksioma i glasi:

V_E Za svaku pravu a i za svaku tačku A koja ne pripada pravoj a postoji jedna i samo jedna prava b koja sadrži tačku A a ne siječe pravu a.

Skup svih aksioma od I do V_E i njihovih posljedica zove se Euklidska geometrija. Prostor čije tačke prave i ravni zadovoljavaju sve uslove Hilbertovog sistema aksioma zove se Euklidski prostor. Ravan je Euklidska ako tačke, prave te ravni zadovoljavaju sve uslove Hilbertovog sistema aksioma.

Definicija: Neka su prave a i b komplanarne. Kažemo da je prava a paralelna sa pravom b i to zapisujemo ovako $a \parallel b$ ako je $a \cap b = \emptyset$ ili je $a \equiv b$.

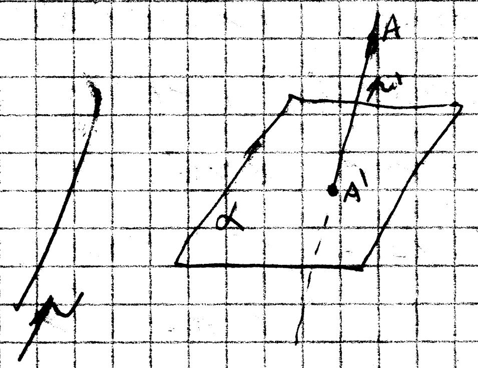
Iz ove definicije odmah slijedi da je u skupu svih pravi jedne ravni relacija „je paralelna" refleksivna i simetrična. Dokažimo da je ta relacija i tranzitivna. Neka je $a \parallel b$ i $b \parallel c$. Ako nije $a \parallel c$ onda postoji tačka $\{A\} = a \cap c$. Sada tačkom A sadrže dvije prave od kojih svaka ne siječe pravu b. Ovo je kontradikcija sa aksiomom paralelnosti pa mora biti $a \parallel c$. Na taj način dokazana je sljedeća teorema: U skupu svih pravih jedne ravni relacija je paralelna je relacija ekvivalencije.

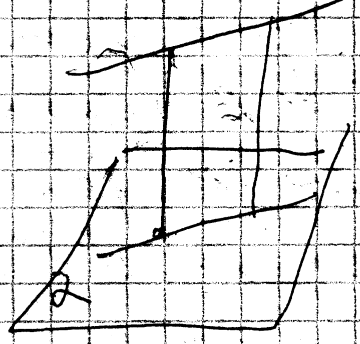
Navešćemo dvije neposredne posljedice aksiome paralelnosti:

posljedica 1: Ako prava siječe jednu od dvije paralelne prave siječe i drugu.

posljedica 2: Ako je prava normalna na jednu od dvije paralelne prave normalna je i na drugu.

Pokazaćemo da je i u skupu svih pravih prostora relacija „je paralelna" relacija ekvivalencije. Pošto su refleksivnost i simetričnost te relacije sadržane u samoj definiciji trebaće dokazati tranzitivnost, a u tu svrhu najprije treba dokazati sljedeću lemu.





Lema

Neka su prave a, b i c tri prave prostora od kojih su svake dvije komplanarne. Tada: Ako se dvije od njih sijeku i treća sadrži tu presječnu tačku, a ako su dvije od njih paralelne i treća je paralelna sa svakom od ovih pravih. Dokaz: Pošto su svake dvije prave komplanarne neka $a, b \subset \gamma$, $a, c \subset \beta$ i $b, c \subset \alpha$. Predpostavimo da se prave a i b sijeku u nekoj tački A. Pošto prava $a \subset \beta$ i prava $b \subset \alpha$ to je $A \in \beta$ i $A \in \alpha$ pa zaključujemo da ravni α i β imaju zajedničku pravu c to je prava c pa $A \in c$.
Neka je sada $a \parallel b$. Tada nepostoji $a \cap c$ jer bi, po prvom dijelu dokaza, prava b sadržavala i tu presječnu tačku pa bi postojao $a \cap b$ a to je suprotno pretpostavci $a \parallel b$.

Teorema

U skupu svih pravih prostora, relacija je paralelna je relacija ekvivalencije.

Dokaz: Kao što smo utvrdili ostalo je još da se dokaže osobina tranzitivnosti. Neka je $a \parallel c$ i $b \parallel c$. Uzmimo na pravoj a tačku A i neka je β ravan koja sadrži tačku A i pravu b a γ ravan koja sadrži tačku A i pravu c. Pošto ravni β, γ imaju zajedničku tačku A to postoji prava $a' = \beta \cap \gamma$. Sada su prave a', b komplanarne, jer pripadaju ravni β. Prave a' i c su komplanarne, jer pripadaju ravni γ a prave b i c su komplanarne jer su paralelne. Dakle imamo tri prave u prostoru a', b, c od koje su svake dvije komplanarne, $b \parallel c$. Na osnovu teme slijedi da je $a' \parallel b$ i $a' \parallel c$. To znači da tačku A sadrže dvije prave a i a' od kojih je svaka paralelna sa c. Ovo je kontradikcija sa aksiomom V_5 pa mora biti $a' = a$ otuda slijedi da je $a \parallel b$ što je i trebalo dokazati.

U skupu svih pravih ravni i u skupu svih pravih prostora relacija je paralelna je relacija ekvivalencije pa ona određuje particiju na klase ekvivalencije. Svaka takva klasa ekvivalencije zove se pravac. Pravac određen pravom p označavamo ovako (p).

Definicija projekcije tačke na ravan u pravcu (p): Projekcija tačke A na ravan α u pravcu p je presječna tačka ravni α i onog elementa pravca p koji sadrži tačku A.

Projekcija figure F na ravan α u pravcu p je skup svih projekcija svih tačaka figure F na ravan α u pravcu p. Na sličan način za svaku tačku A, svaku figuru F i svake dvije prave a i p sve u ravni α definiše se projekcija figure F na pravu a u pravcu p. Primjedba: Kako su u Euklidskoj geometriji sve normale na istu pravu, odnosno sve normale na istu ravan paralelne to je normalna projekcija koju smo spominjali u plani specifičan slučaj ovdje definisane paralelne projekcije.

Definicija prave paralelne ravni:
Prava a je paralelna sa ravni α ako je ona paralelna sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan. To zapisujemo ovako $a \parallel \alpha$, $\alpha \parallel a$. U ovom drugom slučaju kažemo da je ravan α paralelna sa pravom a.

Iz ove definicije i prethodnog gradiva odmah proizilaze ove osobine:

1. ako je prava $a \parallel \alpha$ onda je ona paralelna sa bezbroj pravih u toj ravni.
2. $a \parallel \alpha \iff a \cap \alpha = \emptyset$
3. Ako $P \notin a$ postoji bezbroj ravni koje sadrže tačku P a paralelne su sa pravom a.

Sve te ravne sadrže pravu koja je paralelna sa pravom a.

Teorema 2

Ako jedna od dvije paralelne ~~...~~ prave siječe ravan, siječe je i druga.

Dokaz: Neka je $a \parallel b$ i neka je β neka ravan za koju vrijedi $\beta \cap a = \{A\}$. Treba dokazati da i prava b siječe ravan β. Pretpostavimo suprotno. Neka prava b ne siječe β. Pošto su prave a, b paralelne one određuju neku ravan α. Tačka $A \in \alpha$, $A \in \beta$ pa postoji prava $p = \alpha \cap \beta$. Ako prava b ne siječe ravan β onda je $b \cap p = \emptyset$. Sada u ravni α postoje dvije prave a i p od kojih svaka sadrži tačku A a ne siječe pravu b. Ovo je kontradikcija sa aksiomom paralelnosti. Dakle i prava b siječe ravan β.

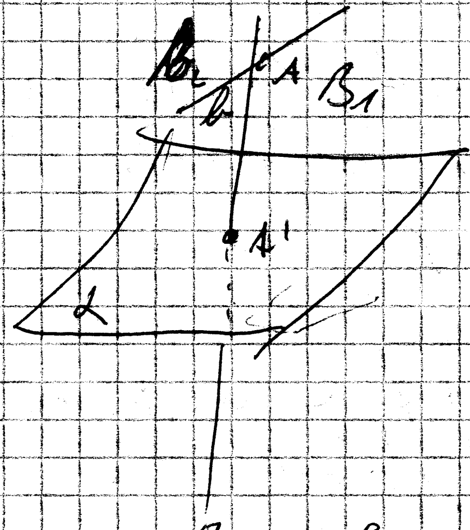
Neposredna posljedica prethodne teoreme je ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na ravan normalna je i druga.

Definicija

Ravan α je paralelna ravni β što zapisujemo ovako $\alpha \parallel \beta$ ako je $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ili $\alpha \equiv \beta$.

Iz ove definicije slijedi da je relacija je paralelna u skupu svih ravni prostora refleksivna i simetrična. Da je tranzitivna slijediće iz teoreme: Za svaku ravan α i za svaku tačku A koja $A \notin \alpha$ postoji tačno jedna ravan β koja sadrži tačku A i paralelna je sa ravni α.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tj. da ne važi teorema tj. neka postoje dvije ravni β_1 i β_2 od kojih svaka sadrži tačku A i paralelna su sa ravni α. Pošto ravni β_1, β_2 imaju zajedničku tačku A to postoji prava $b = \beta_1 \cap \beta_2$. Neka je tačka A' ortogonalna projekcija tačke A na ravan α a δ proizvoljna ravan koja sadrži pravu AA' ali ne sadrži pravu b.



δ - delta

Ravni β_1 i δ također ravni β_2 i δ imaju zajedničku tačku A pa postoje prave $a_1 = \beta_1 \cap \delta$ i $a_2 = \beta_2 \cap \delta$. Kako su β_1 i β_2 dvije različite ravni, to je $a_1 \neq a_2$. Dalje, pošto ravan δ sadrži pravu AA' to je $\delta \perp \alpha$, i ako je $a' = \alpha \cap \delta$ onda je prava a' normalna projekcija i prave a_1 i prave a_2 na ravan α. Iz $\beta_1 \parallel \alpha$ slijedi $\beta_1 \cap \alpha = \emptyset$ tj. $a_1 \cap a' = \emptyset$. Na isti način zaključujemo da je $a_2 \cap a' = \emptyset$. Dakle u ravni δ postoje dvije prave a_1 i a_2 od kojih svaka sadrži tačku A a ne siječe pravu a' te ravni. To je kontradikcija sa aksiomom paralelnosti pa pretpostavka da postoje dvije ravni β_1 i β_2 nije tačna pa teorema je dokazana.

Iz ove teoreme odmah slijedi da je relacija

„...je paralelna..." u skupu svih ravni prostora tranzitivna. Naime ako je $\alpha \parallel \gamma$ i $\beta \parallel \gamma$ onda mora biti $\alpha \parallel \beta$ po prethodnoj teoremi. Na taj način je dokazana sljedeća teorema:

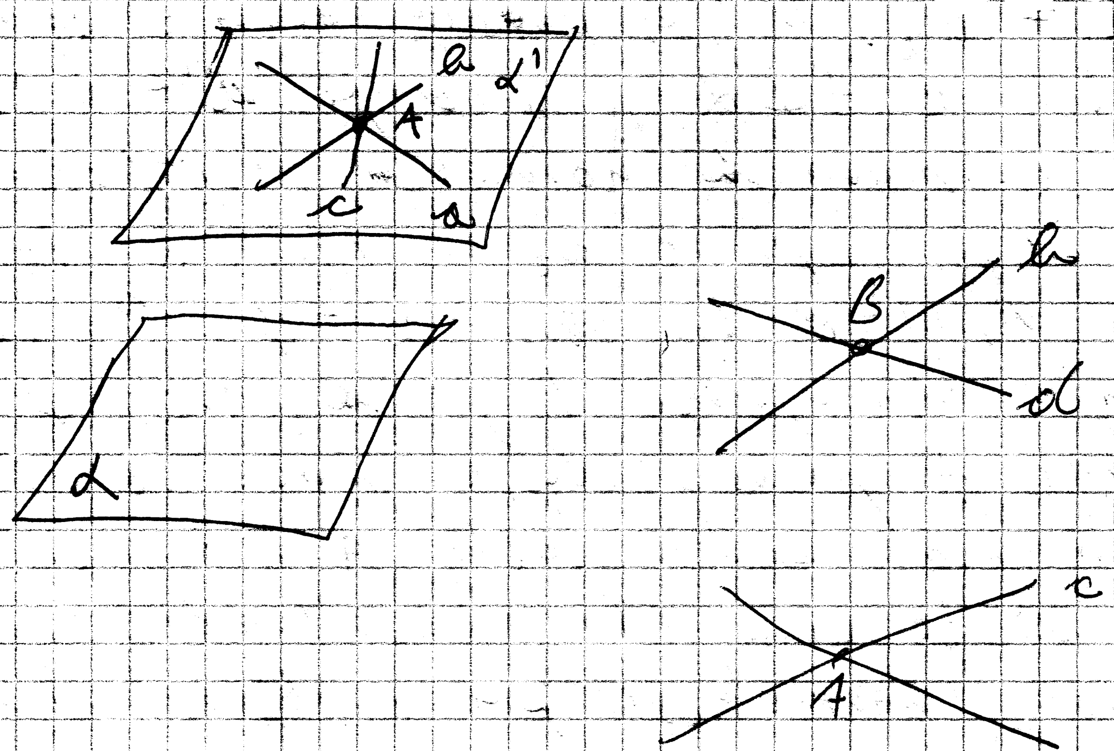
Teorema:

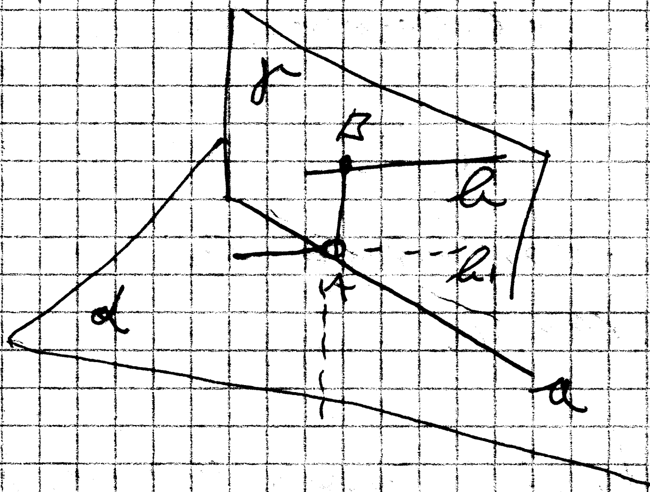
U skupu svih ravni prostora relacija „$\parallel$" („...je paral...") je relacija ekvivalencije.

Sljedeća teorema tvrdi egzistenciju ravni koja sadrži datu tačku a paralelna je datoj ravni.

Teorema

Ako tačka $A \notin \alpha$, sve prave koje sadrže tačku A a paralelne su sa ravni α komplanarne su. Ta ravan je paralelna ravni α.





Dokaz: Neka su prave a i b prave koje sadrže tačku A i paralelne sa sa ravni α. Pošto se te dvije prave sijeku one ~~koje~~ određuju neku ravan α'. Tvrdimo da je $\alpha' \parallel \alpha$. Predpostavimo da ta tvrdnja nije tačna. Tada se ~~prave~~ ravni α i α' sijeku i neka je p njihova presječna prava. Kako je $a \parallel \alpha$ to je $a \cap \alpha = \emptyset$ pa je $a \cap p = \emptyset$. Iz istog razloga je $b \cap p = \emptyset$. Sada u ravni α' imamo dvije prave a i b od kojih svaka sadrži tačku A a ne siječe pravu p. Ovo je kontradikcija sa aksiomom paralelnosti. Dakle mora biti $\alpha' \parallel \alpha$.

Neka je c neka treća prava koja sadrži tačku A i paralelna je sa ravni α. Tvrdimo da je prava c sadržana u ravni α'. Pa predpostavimo da ova tvrdnja nije tačna. Tada pošto se prave a i c sijeku one određuju neku ravan α'' koja je po prvom dijelu dokaza paralelna sa α. Sada u tački A postoje dvije ravni α', α'' i svaku je paralelna sa α. Ovo je kontradikcija sa tvrdnjom prethodne teoreme. Znači i prava e pripada ravni α.

Definicija

Dvije prave su mimoilazne ako nisu sadržane u istoj ravni.

Primjedba

Primjetimo da su dvije mimoilazne prave sadržane u dvjema paralelnim ravnima.
Zaista, neka su prave a i b dvije mimoilazne prave. Uzmimo na pravoj a proizvoljnu tačku A i neka je c prava koja sadrži tačku A, a paralelna je sa pravom b. Neka je $B \in b$ i d prava koja sadrži tačku B a paralelna je sa pravom a. Prave a i c se sijeku pa određuju neku ravan α. Isto tako prave b i d se sijeku pa određuju neku ravan β. Prema prethodnoj teoremi $\alpha \parallel \beta$.

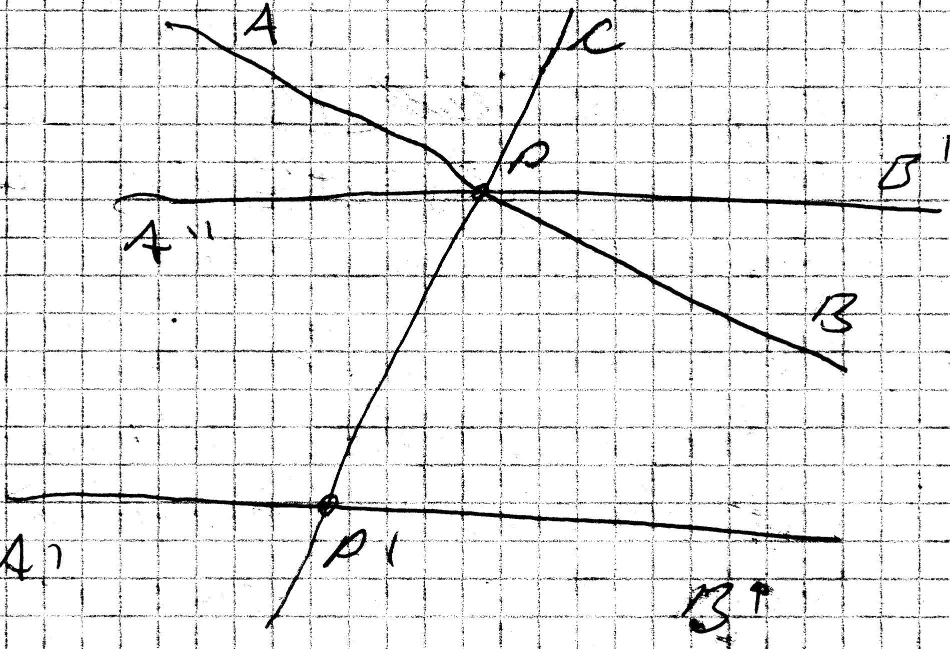
Teorem

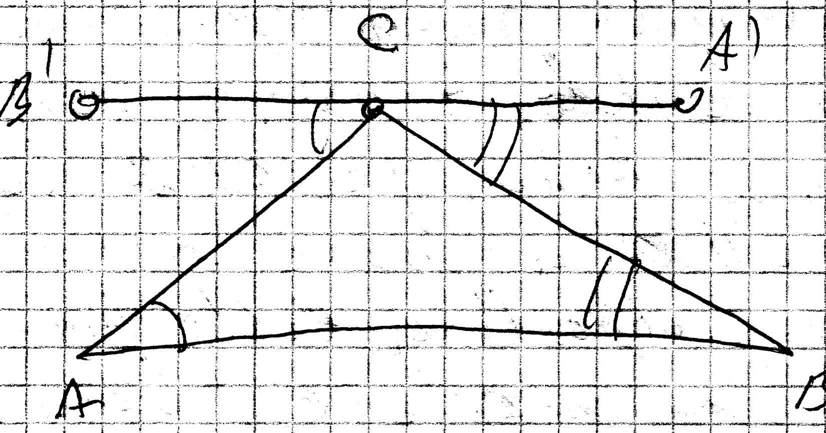
Za svake dvije mimoilazne prave postoji zajednička normala.

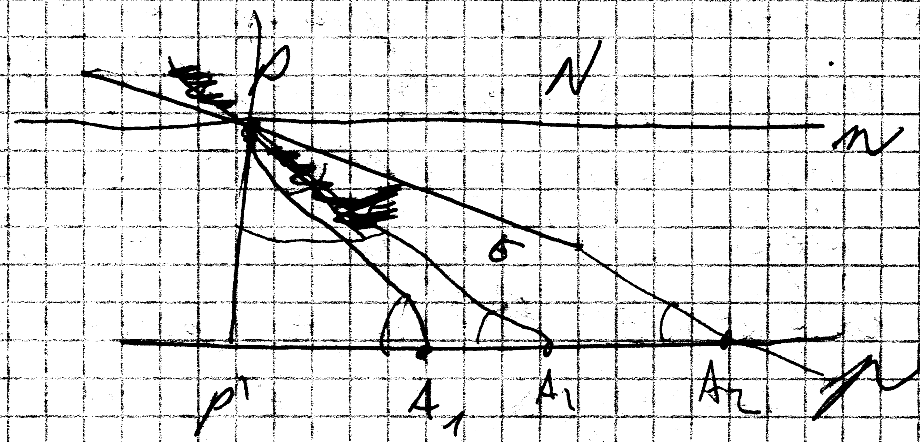
Dokaz: Neka su a i b dvije mimoilazne prave, α ravan koja sadrži pravu a a paralelna je sa pravom b i γ ravan koja sadrži pravu a i normalna je na ravan α. Tvrdimo da u ravni α postoji prava c koja siječe pravu a. Naime $b \parallel \alpha$ intuicira (povlači) da je b paralelna sa sistema pravih u toj ravni. Pa u ravni α postoji prava $c \parallel \cancel{b}$. Ako nije $c \cap a = \{S\}$ onda je $c \parallel a$. Kako je $c \parallel b$ to bi dobili da je $a \parallel b$ a prave a i b su mimoilazne po pretpostavci. Dakle prava c siječe pravu a pa siječe i ravan γ. Pošto je $b \parallel c$ to i prava b siječe ravan γ pa neka je $\{B\} = \gamma \cap b$. Neka je A normalna projekcija tačke B na ravan α i β ravan koja sadrži pravu b i tačku A. Stavimo $b' = \alpha \cap \beta$. Pošto je prava ~~AB~~ AB normalna na ravan α to je prava AB normalna na pravu b'. Već znamo da je $\underline{AB \perp a}$. Kako je $b \parallel \alpha$ to je $b \parallel b'$ pa je $\underline{AB \perp b}$.

Ekvivalenti aksiome paralelnosti.

V Euklidov postulat







V

<u>Peti Euklidov postulat</u>

Ako dvije prave u presjeku sa trećom obrazuju suprotne uglove čiji je zbir manji od ravnog ugla postoji presjek te dvije prave.

<u>Dokaz:</u> Uočimo prave $\underline{AB}$ i $A'B'$, pravu e. Neka je $\{P\} = \underline{AB} \cap e$ a $\{P'\} = \underline{A'B'} \cap e$, i neka vrijedi:

$\measuredangle BPP' + \measuredangle B'P'P <$ ravnog ugla. Iz aksioma prve, druge i treće grupe i njihovih posljedica slijedi da postoji prava $A''B''$ koja sadrži tačku P i pri tome je $\measuredangle B''PP' + \measuredangle B'P'P =$ ravan ugao. Dokazali smo da je tada $\underline{A''B''} \cap \underline{A'B'} = \emptyset$. Dalje ako vrijedi aksioma paralelnosti onda je

prava $A''B''$ jedina prava koja sadrži tačku P a ne siječe pravu $A'B'$. Svaka druga prava pa i prava AB mora sječi pravu $A'B'$.
Vidimo da je V Euklidov postulat posljedica aksiome ~~ekvivalentnosti~~ paralelnosti.
No mi ćemo dokazati da je V Euklidov postulat ekvivalentan aksiomi paralelnosti tj. predpostavićemo da je V Euklidov postulat aksioma a dokazaćemo V_E. Zaista, ako za prave AB i $A'B'$ koje u presjeku sa trećom pravom c čine suprotne uglove, čiji je zbir manji od ravnog ugla, presjek uvijek postoji, onda tačku $P \in AB$ sadrži samo jedna prava koja ne siječe pravu $A'B'$. To je ona prava koja sa pravom $A'B'$ pri presjeku sa pravom c obrazuje suprotne uglove čiji je zbir jednak ravnom uglu.
Na taj način dokazana je teorema da V Euklidov postulat ekvivalentan je aksiomi paralelnosti.
Aksioma paralelnosti ima i druge ekvivalente. Navešćemo neke od njih.

Tvrdnja
Zbir uglova trougla jednak je ravnom uglu, ekvivalentna je aksiomi paralelnosti.

Dokaz: Predpostavimo da vrijede sve aksiome i aksioma paralelnosti. Uočimo trougao $\triangle ABC$. Sa one ~~str~~ strane prave AC sa koje nije tačka B uzmimo tačku B' tako da je

$\sphericalangle B'CA \cong BAC \Rightarrow \overline{B'C} \cap \overline{AB} = \emptyset$. Dalje sa one strane prave $\overline{BC}$ sa koje nije tačka A uzmimo tačku A' tako da je

$\sphericalangle A'CB \cong \sphericalangle ABC$. Odatle slijedi da je

$$\overline{A'C} \cap \overline{AB} = \emptyset$$

Dakle tačka C sadrži dvije prave koje ne sijeku pravu $\overline{AB}$. Ovo je kontradikcija sa aksiomom paralelnosti pa su tačke B', C i A' kolinearne i pritome su B', A' sa raznih strana tačke C. Odavde je

$$\text{ravan ugao} = \sphericalangle B'CA' = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA$$

što je i trebalo dokazati.

Predpostavimo sada da važi tvrdnja: Zbir uglova trougla je ravan ugao i dokažimo V_E.

Uočimo pravu p i tačku $P \notin p$. Neka je P' normalna projekcija tačke P na pravu p i m prava koja sadrži tačku P a normalna je na pravu PP'. Pošto su prave p i m normalne na istu pravu to je $m \cap p = \emptyset$.

Dokazaćemo da svaka druga prava koja je različita od prave m mora sjeći pravu p. Neka je N proizvoljna tačka prave m različita od tačke P. Bez umanjenja opštosti predpostavimo da neka prava PE ima tačku u unutrašnjosti ugla $\sphericalangle NPP'$. Tačka P1 dijeli pravu p na dvije poluprave. Na jednoj od njih uzmimo tačke $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ tako da je $PP' \equiv P'A_1$, $PA_1 \equiv A_1A_2$, $PA_2 \equiv A_2A_3$ itd i pritome je $P'A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ...

Trougao $\Delta PP'A_1$ je jednakokraki pravougli trougao s pravim uglom s vrhom P'. Zbir ostala dva ugla je jednak pravom uglu i pošto su to uglovi podudarni dobijamo $\sphericalangle P'A_1P = \frac{d}{2}$ gdje je d pravi ugao. Dalje ΔPA_1A_2 je jkk trougao sa vrhom u A_1. Ugao $\sphericalangle P'A_1P$ jednak je zbiru dva ugla tog trougla koji mu nisu naporedni. Pošto su ti uglovi podudarni dobivamo da je $\sphericalangle P'A_2P = \frac{d}{2^2}$. Nastavljajući postupak dobivamo da je $\sphericalangle P'A_nP = \frac{d}{2^n}$. Na osnovu teorema koje tvrde ono za uglove što teoreme koje su posljedice aksioma neprekidnosti tvrde za duži slijedi da postoji cio pozitivan broj, n dovoljno velik tako da bude $\sphericalangle P'A_nP = \frac{d}{2^n} < \sphericalangle EPN$.

S druge strane u pravouglom trouglu $\Delta P'A_nP$ je $\sphericalangle P'PA_n + \sphericalangle P'A_nP = d$. S druge strane ugao $\sphericalangle P'PN$ je pravi pa vrijedi $\sphericalangle P'PA_n + \sphericalangle A_nPN = d$. Sada je $\sphericalangle P'A_nP = \sphericalangle A_nPN$. Pošto je $\sphericalangle P'A_nP < \sphericalangle EPN$ to je sada $\sphericalangle A_nPN < \sphericalangle EPN$. Ovo pak znači da prava $\underline{PE}$ ima tačaka u unutrašnjoj oblasti trougla $P'PA_n$ pa mora sjeći stranicu $P'A_n$ tog trougla. Dakle svaka prava različita od prave m siječe pravu p

Primjedba

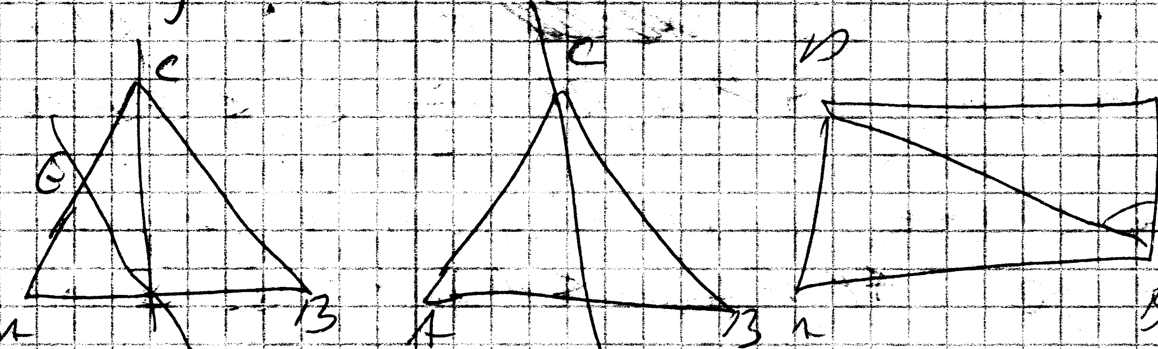
Primjetimo da se u prethodnoj teoremi polazi od pretpostavke da je zbir uglova bilo kojeg trougla ravan ugao. Može se međutim dokazati da i iz egzistencije bar jednog trougla čiji je zbir uglova ravan ugao slijedi to, ali prethodno treba dokazati nekoliko lema. Samo ćemo ih navesti:

Lema 1

Ako je zbir uglova trougla ravan ugao, onda je i zbir uglova svakog trougla koji je od njega osječen nekom pravom ravan ugao.

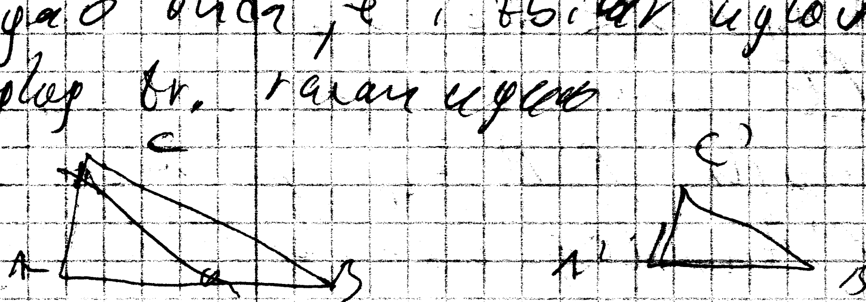
Lema 2

Ako je zbir uglova pravouglog trougla ~~pravog ug~~ ravan ugao onda je i zbir uglova trougla kada se katete prog trougla udvostruči ravan ugao.



Lema 3

Ako je zbir uglova jednog pravouglog tr. ravan ugao onda je i zbir uglova svakog pravouglog tr. ravan ugao



Kao posljedicu dobijamo teoremu:
Ako je zbir uglova jednog ~~ugla~~ trougla ravan ugao onda je zbir uglova svakog trougla ravan ugao.
Navešćemo nekoliko posljedica:

Posljedica 1

Tvrdnja: postoji trougao čiji je zbir uglova ravan ugao ekvivalentna je aksiomi V_E.
Posljedica 1 može se iskazati i ovako:
Tvrdnja: Postoji trougao ABC takav da je mjerni broj $m(\measuredangle A)+m(\measuredangle B)+m(\measuredangle C)=\pi$ ekvivalentno je sa V_E.

Posljedica 2

Postoji prost četverougao čiji je zbir uglova dva ravna ugla ekvivalentno je sa V_E.

Posljedica 3

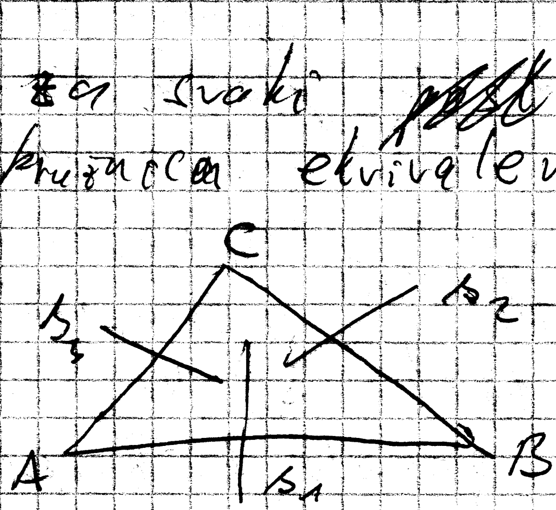
Svaki ugao Sakijevog četverougla je prav ekvivalentno je sa V_E.

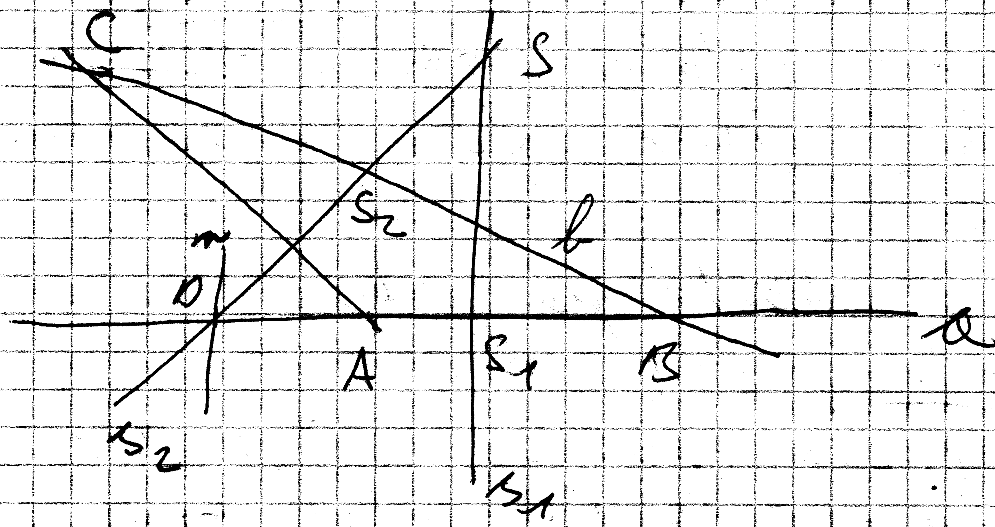
Posljedica 4

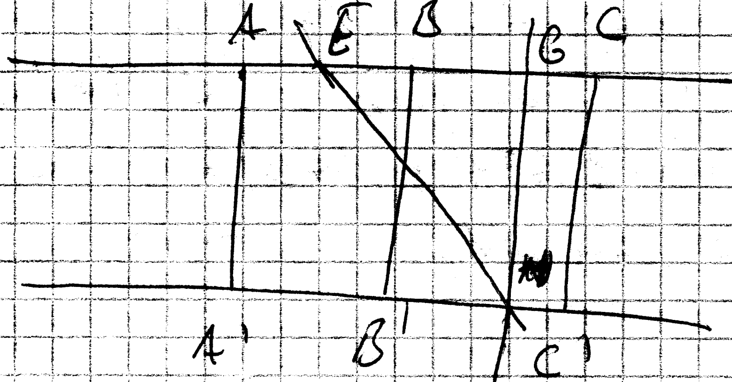
Tvrdnja: postoji prava koja sadrži unutrašnju tačku ugla i siječe oba kraka ugla ekvivalentno je sa V_E.

Teorema

Tvrdnja: ~~za~~ svaki ~~~~ trougao posjeduje opisanu kružnicu ekvivalentna je sa V_E.







Dokaz: Pretpostavimo prvo da je aksioma V_E zadovoljena. Dokažimo da se oko svakog trougla $\triangle ABC$ može opisati kružnica. Neka je s_1 simetrala stranice AB a s_2 simetr. stranice BC $\triangle ABC$. Pretpostavimo da se prave s_1 i s_2 ne sijeku. Tada je $s_1 \parallel s_2$. Pošto je $s_1 \perp \underline{AB}$ i $s_2 \perp \underline{BC}$ sada je $\underline{AB} \perp s_1$ i $\underline{BC} \perp s_1$. Dakle u tački B postoje dvije različite prave od kojih je svaka normalna na istu pravu. Ovo je kontradikcija sa tvrdjom teoreme o jedinstvenosti normale. Prema tome postoji tačka $\{S\} = s_1 \cap s_2$. Ranije smo dokazali da i simetrala s_3 stranice AC sadrži tačku S. Vrijedi dakle $AS \cong BS \cong CS$ i S je centar kružnice opisane oko trougla $\triangle ABC$. Neka su sada zadovoljene sve aksiome iz aksioma paralelnosti do V_5 i tvrdnja za svaki troug. postoji opisana kružnica. Dokažimo V_5. U tu svrhu uočimo pravu a i dvije prave s_1, s_2 od kojih prava s_1 siječe pravu a u nekoj tački S_1 i normalna je na pravu a a prava s_2 siječe pravu a u nekoj tački P ali nije normalna na pravu a. Uzmimo na pravoj a tačke A, B sa raznih strana tačke S_1 tako da je $AS_1 \cong BS_1$. Neka je b prava koja sadrži tačku B a normalna je na pravu s_2. Neka je $\{S_2\} = b \cap s_2$. Na pravoj b uzmimo tačku C tako da je $B\text{-}S_2\text{-}C$ i $CS_2 \cong BS_2$. Kako prava s_2 nije normalna na pravu a tačke A, B i C su nekolinearne i poč- tvoj trougao $\triangle ABC$. Prava s_1 je sime- trala str. AB tog troug. a prava s_2 je sim. str. BC tog trougla. Pošto vrijedi tvrdnja za svaki tr. postoji opisana kruž. prave s_1 i s_2 sijeku se u nekoj tački S. Dakle svaka prava koja sadrži tačku P prave a i nije normalna na pravu a siječe pravu s_1. Drugim riječima postoji samo jedna prava koja sadrži tačku P i ne siječe pravu s_1 to je ona koja je normalna na pravu a.

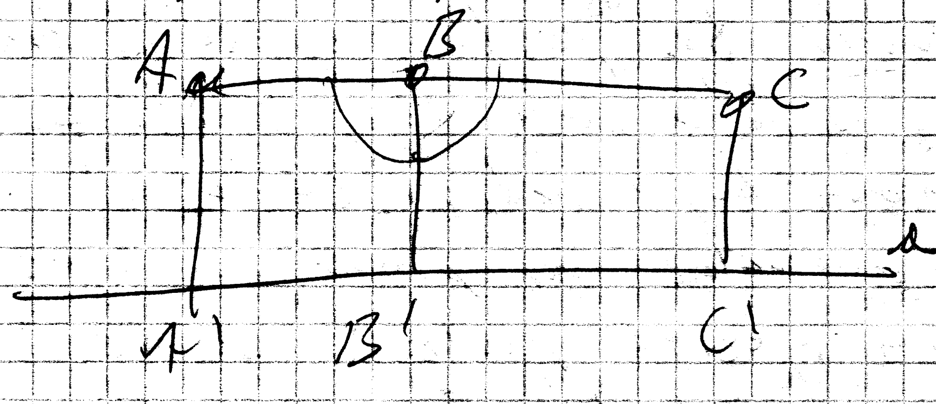
Teorema

Tvrdnja u ravni postoje tri kolinearne tačke čija su odstojanja od date prave podudarna ekvivalentna je sa V_5. Dokaz: Uočimo kolinearne tačke A, B i C i pravu a. Neka su A', B' i C' normalne projekcije tačaka A, B i C na pravu a i neka je $AA' \cong BB' \cong CC'$. Četverougao $AA'B'B$ je Sakkerijev četverougao. Za pravu koja sadrži srednju duž EF tog četver. vrijedi:

$$EF \perp a, \quad EF \perp AB,$$

četver. $BB'C'C$ je Sakkerijev četver. Za prave koja sadrži srednju duž GH tog četverougla vrijedi $GH \perp a$ i $GH \perp AB$. Dobijemo da je svaki ugao četverougla $EFHG$ prav pa je zbir uglova trougla $\triangle EFH$ jednak ravnom uglu, a ova je tvrdnja ekvivalentna sa V_5.

Pretpostavimo sada da vrijedi aksioma paralelnosti i da su A, B i C bilo proizvoljne tačke u ravni čija su odstojanja od date prave podudarna.

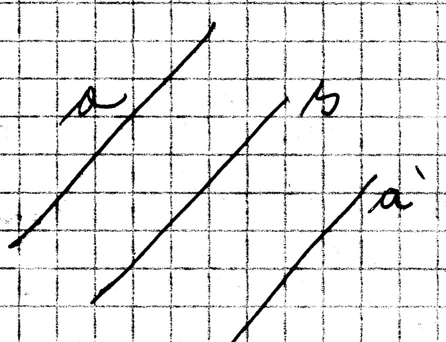


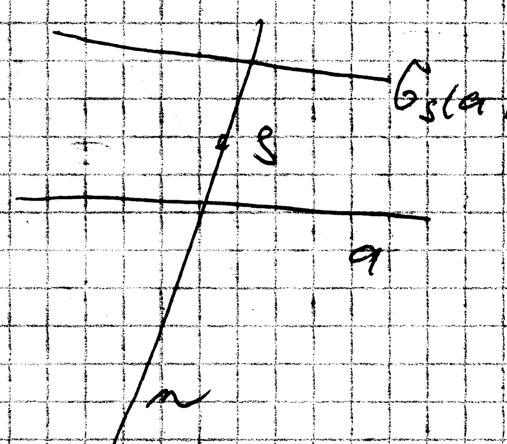
Pa ako su A', B' i C' normalne projekcije tačaka A, B i C na pravu a onda je po pretpostavci $AA' \cong BB' \cong CC'$. Pretpostavimo još da je $A' \cdot B' \cdot C'$. Četverougao $AA'B'B$ je

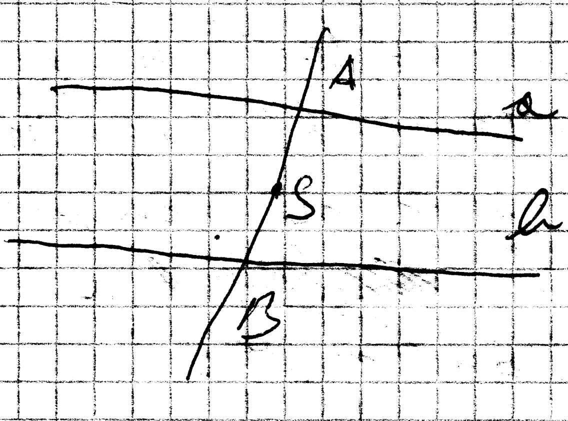
Sakerijev čet. Pošto vrijedi aksioma paralelnosti to je svaki ugao Sakerijevog čet. pravi pa je ugao $\sphericalangle ABB'$ pravi ugao. Na potpuno sličan način zaključujemo i da je ugao CBB' pravi ugao. Kako je $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ⊥ a i $A'B'C'$ to su tačke A i C s različitih strana prave $\overline{BB'}$. Kako je još ugao

$\sphericalangle ABB' \cong \sphericalangle CBB'$ zaključujemo da su tačke A, B, C kolinearne

Neke posljedice aksiome paralelnosti







Neka je $a \parallel b$ gdje je b osa simetrije, i $a' = G_s(a)$. Tvrdimo da je i $a' \parallel b$. Ako nije onda postoji $a' \cap b = \{P\}$. No tada tačke

$P \in a$ pa kako $P \in b$ slijedilo bi da se prave a i b sijeku. Prema tome vrijedi: ako je prava paralelna osi simetrije onda je i njena osno simetrična slika paralelna osi simetrije. Ranije smo dokazali da se prava koja sadrži centar simetrije preslikava na samu sebe, bez prave koja ne sadrži centar simetrije vrijedilo je: ako je S centar simetrije, $S \notin a$ tada su prava a i $G_S(a)$ bile normalne na istu pravu i to pravu koja sadrži centar simetrije. Sada je jasno da su te dvije prave paralelne. Prema tome vrijedi: centralna simetrija preslikava pravu na paralelnu pravu.

Teorema

Postoji bezbroj centralnih simetrija koji jednu od dvije paralelnih prave preslikavaju na drugu. Centri tih simetrija incidentni su sa istom pravom koja je paralelna sa uočenim pravim.

Dokaz: Neka je A proizvoljna tačka na pravoj a, ~~m~~ m prava koja sadrži tačku A i normalna je na pr. a. Tada je prava m normalna i na pravu b pa ako je $\{B\} = m \cap b$ i S središte duži AB onda je:

$$AS = BS = \frac{1}{2} AB \quad i$$

$$G_S(A) = B \quad i \quad G_S(a) = b$$

Kako je tačka A proizvoljna tačka prave a to postoji bezbroj tačaka S koje su prema posljednjoj teoremi prethodnog paragrafa sve incidentne sa istom pravom a ta je prava paralelna sa datim pravim.

početak ovog predavanja je iza nekoliko LISTOVA

3 ČAS

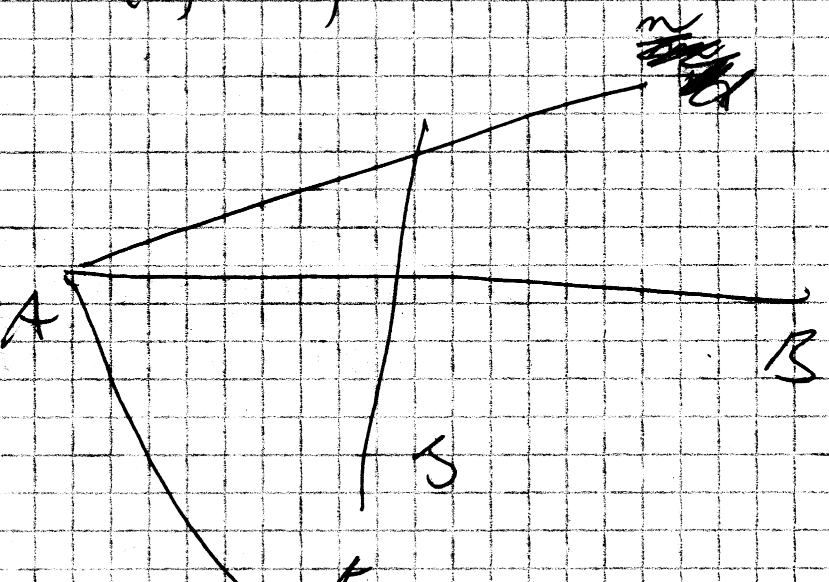
NASTAVAK:

Prema tome tačka O pripada normali u tački A na pravu t.

<u>Konstrukcija</u>

Konstruišemo: 1. duž AB podudarnu datoj duži c,

2. ugao $\measuredangle BAt$ podudaran datom uglu γ.
3. simetralu s duži AB
4. normalu n u tački A na pravu t
5. $\{O\} = s \cap n$
6. kružnicu $k(O, OA)$

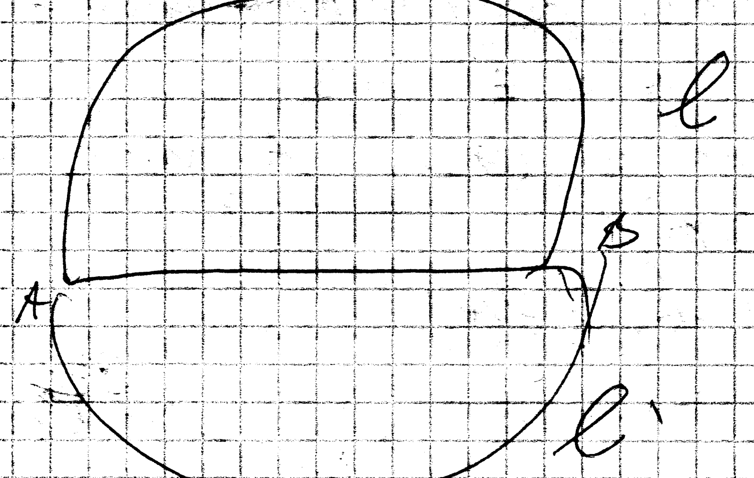


<u>Dokaz</u>: Neka je C tačka kružnice k koja

ne leži u uglu ∢BAt. Tada je ugao ∢ACB periferiski nad lukom AB, podudaran je graničnom periferiskom uglu ∢BAt nad tim istim lukom. Po konstrukciji z granični periferiski ugao BAt podudaran je datom uglu je dakle ∢ACB ≅ γ.

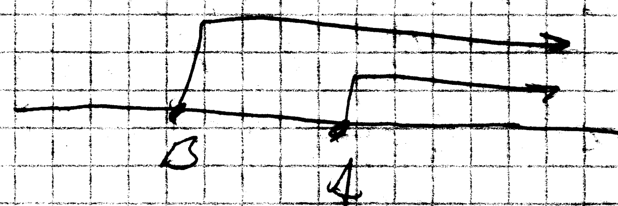
Determinacija

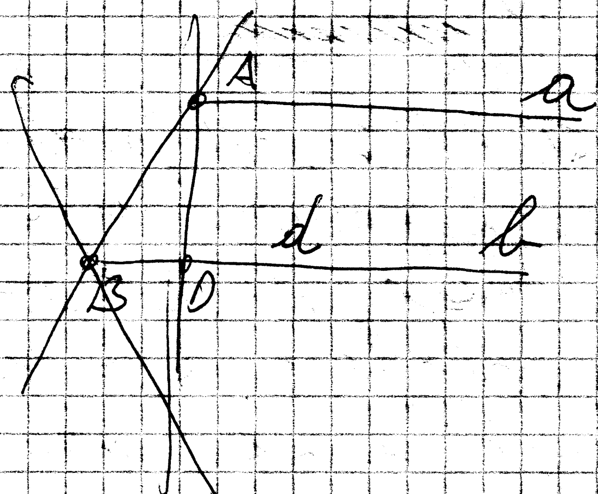
Ako je dato ugao različit od pravog ugla onda zadatak uvijek ima rješenje jer je sve tačke konstrukcije moguće uvijek izvesti. Zadatak zapravo ima dva rješenja. Naime drugo rješenje je luk l' koji je simetričan luku l u odnosu na pravu AB ali simetrična rješenja smatramo jednim.



Ako je ugao pravi rješenje je polukružnica konstruirana nad AB kao prečnikom.

Orjentacija paralelnih polupravih





Naprijed smo definisali relaciju iste orjentacije za pp. koje su pripadale istoj pravoj. Govorili smo $a \uparrow\uparrow b$ ako je $a \subseteq b$ ili $b \subseteq a$.
Sada ćemo ovu definiciju proširiti na paralelne poluprave. Poluprave su paralelne ako su paralelne prave koje ih sadrže.

<u>Definicija</u>

Kažemo da je poluprava a isto orjentisana kao poluprava b i to zapisujemo ovako $a \uparrow\uparrow b$ ako je $a \parallel b$ i ako pp a, b pripadaju istoj poluravni čija je ivica prava $\underline{AB}$ gdje je A početna tačka pp a a B početna tačka poluprave b.
Za poluprave koje nepripadaju paralelnim pravim, relacija iste orjentacije ne definiše se.

Iz same definicije slijedi da je relacijom iste orijentacije u skupu paralelnih polupravih refleksivna i simetrična. Trebamo dokazati da je ona i tranzitivna relacija. Pa neka je $a \uparrow\uparrow b$ i $b \uparrow\uparrow c$. Treba dokazati da je $a \uparrow\uparrow c$. Najprije pretpostavimo da su poluprave b i c (TAČKE a i c) kolinearne. Tada iz $a \uparrow\uparrow b$ i $b \uparrow\uparrow c$ slijedi: poluprave a i b su sadržane u istoj poluravni čija je ivica prava AB i $b \subseteq c$ ili $c \subseteq b$. Sada i iz $b \subseteq c$ a također $c \subseteq b$ slijedi da su poluprave a i c sadržane u istoj poluravni čija je ivica prava AC. Pretpostavimo sada da poluprave b i c nisu kolinearne. Sada iz pretpostavki slijedi poluprave a i b sadržane su u istoj poluravni čija je ivica prava AB i poluprave b i c sadržane su u istoj poluravni čija je ivica prava BC.

Neka je $\{D\} = AC \cap b$

i prave koja sadrži polupravu b. Označimo sa d polupravu čija je početna tačka D i tako da je $b \uparrow\uparrow d$. Na osnovu prvog dijela dokaza tada je $d \uparrow\uparrow a$ i $d \uparrow\uparrow c$. Iz $d \uparrow\uparrow a$ slijedi da su poluprave a i d sadržane u istoj poluravni čija je ivica prava AD. Iz $d \uparrow\uparrow c$ slijedi da su poluprave d i c sadržane u istoj poluravni čija je ivica DC. Kako su prave

AB i BC jedna ista prava, te su polu-prave a i c sadržane u istoj poluravnini čija je ivica prava AC.
Razmotrimo sada slučaj, kada poluprave a, b, c nisu komplanarne. Ako su poluprave a i b sadržane u istoj poluravnini čija je ivica prava AB onda su one sadržane i u istom poluprostoru čija je granica ravan ABC. Ako su poluprave b i c sadržane u istoj poluravnini čija je ivica prava BC onda su one sadržane i u istom poluprostoru sa granicom ABC, slijedi da su poluprave a i c sadržane u istom poluprostoru sa granicom ABC pa i u istoj poluravnini sa ivicom AC.
Dakle relacija iste orjentacije u skupu paralelnih polupravih vrši particiju na klase ekvivalencije.

Definicija

Kažemo da je uređena dvojka (A, B) isto orjentisana kao uređena dvojka (C, D), to zapisujemo ovako $(A, B) \uparrow\uparrow (C, D)$ ako je zatvorena poluprava AB isto orjentisana kao zatvorena prava CD.

Iz ove definic. i prethodnog razmatranja odmah slijedi:
U skupu svih paralelnih, uređenih dvojki tačaka relacija iste orjentacije je relacija ekvivalencije i ona u tome skupu vrši particiju na dvije

klase ekvivalencije. To znači da za dvije uređene dvojke zadovoljena je jedna od sljedeće dvije relacije:

$(A,B) \uparrow\uparrow (C,D)$, nije $((A,B) \uparrow\uparrow (C,D))$

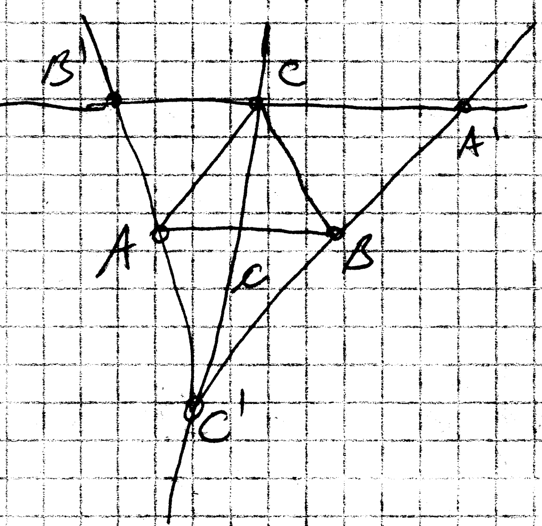
<u>Primjedba:</u>

Primjetimo da za dvojke koje ne pripadaju paralelnim pravim relacija iste orijentacije nedefiniše se.

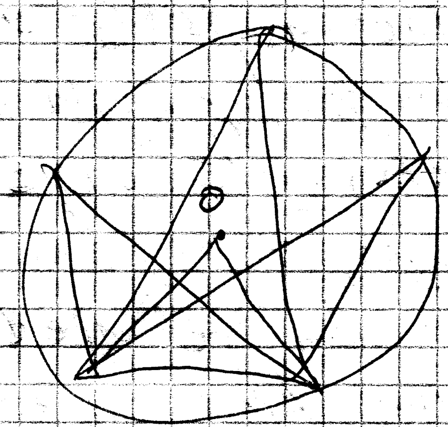
1.2 čas

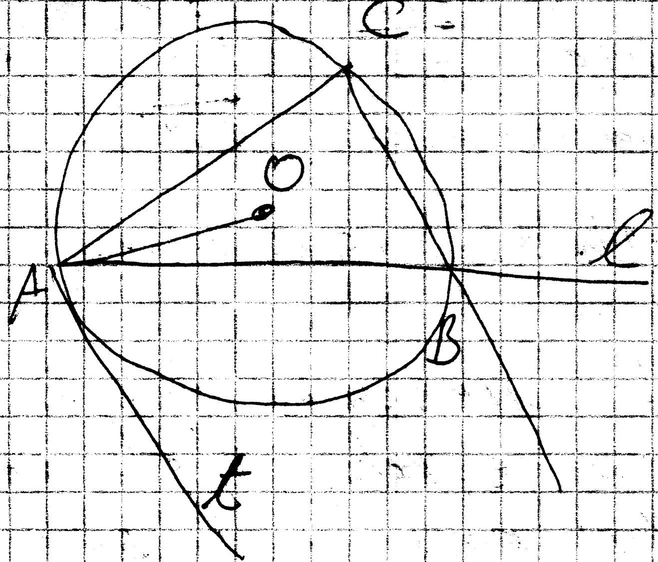
sljedeći tekst dodati prije početka ovog

POČETAK

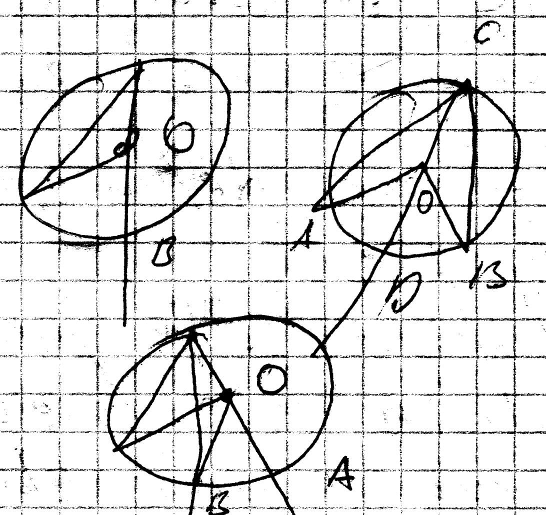


periferiski ugao





Za teoremu



Ako sa s označimo pravu koja se spominje u posljednjoj teoremi onda iz dokaza te teoreme slijedi da je $G_s(a) = b$. Prava s je simetrala figure $a \cup b$. Prava s je također skup središta svih duži čije su krajnje tačke incidentne sa a i sa b.

Drugim riječima vrijedi sljedeća <u>teorema:</u>

Ako su a i b paralelne, skup središta svih duži čije su krajnje tačke incidentne sa a i b je prava s. Neposredne posljedice su:

1° Prava koja sadrži središta dviju stranica trougla paralelna je pravoj koja sadrži treću stranicu.

2° Ako prava sadrži središte jedne stranice trougla i paralelna je pravoj koja sadrži drugu stranicu Δ onda ta prava sadrži središte treće stranice trougla.

<u>Definicija paralelograma:</u> Četverougao čije su naspramne stranice paralelne zove se paralelogram.

<u>Definicija pravougaonika:</u> Paralelogram čije su susjedne stranice normalne je pravougaonik.

<u>Definicija kvadrata:</u> Pravougaonik čije su sve stranice podudarne je kvadrat.

Iz ovih definicija i prethodno razmatranog gradiva imamo čitav niz posljedica:

1° Naspramne stranice paralelograma su podudarne

2° Dijagonale paralelograma se polove

3° Ako su naspramne stranice četverougla

podudarne, četverougao je paralelogram.
4° Ako se dijagonale četverougla polove, četverougao je paralelogram.
5° Stranica trougla je dva puta veća od duži čije su krajnje tačke središta drugih dviju stranica trougla.
6° Ako su u četverouglu po jedan par naspremnih stranica par paralelnih i ~~paralelnih~~ podudarnih duži taj četverougao je paralelogram.
I
Znamo da postoji jedna prava koja sadrži vrh trougla i $\perp$ je na pravu koja sadrži stranicu naspram tog vrha. Dokazat ćemo da se takve 3 prave ~~[illegible]~~ u trouglu sijeku. Posmatrajmo $\triangle ABC$ i 3 prave od kojih svaka sadrži jedno tjeme trougla a paralelna je pravoj koja sadrži stranicu naspram tog tjemena. Pošto se sijeku AB, AC i BC to se sijeku i njima paralelne prave pa dobijemo $\triangle A'B'C'$. U četverouglu $ABA'C$ naspremne stranice su paralelne pa je taj četverougao paralelogram. Slijedi da je $AB \cong A'C$. Iz istog ~~[illegible]~~ razloga je $\square ABCB'$ paralelogram pa je $AB \cong B'C$. Dobijemo da je $A'C \cong B'C$. Ako sa c označimo pravu koja sadrži C a $\perp AB$ onda, pošto je $A'B' \parallel AB$ to je $c \perp A'B'$. Iz $A'C \cong B'C$ i $c \perp A'B'$ slijedi da je c simetrala stranice $A'B'$ novog trougla. Na isti način dobija se da su i ostale dvije prave ~~[illegible]~~ u kojima je ovdje riječ simetrale stranica $A'C'$ i $B'C'$.

$\Delta A'B'C'$. Pošto se simetrale stranica sijeku u jednoj tački to se sijeku i pomenute prave. Ova se tačka zove ortocentar trougla. Ako su sva tri ugla trougla oštri uglovi onda ortocentar pripada unutrašnjoj oblasti Δ. Ako je trougao pravougli onda je ortocentar vrh pravog ugla, a ako je jedan ugao trougla tupi onda ortocentar pripada vanjskoj oblasti trougla.

Definicija

Ako je tjeme ugla tačka na kružnici a kraci mu sijeku kružnicu za ugao kažemo da je periferiski ugao ili ugao upisan u kružnicu.

Definicija

Ugao čiji je vrh u centru kružnice a kraci mu sijeku kružnica zove se centralni ugao.

Presjek kružnice i unutrašnje oblasti uglova zove se zatvoreni ili odgovarajući luk.

Na slici je prikazan periferiski $\sphericalangle ACB$ čiji vrh C leži na kružnici a kraci mu sijeku kružnicu u tačkama A, B. Tačke A, B dijele kružnicu na dva luka. Luk $\overset{\frown}{AB}$ i ACB kažemo da je periferiski $\sphericalangle ACB$ nad $\overset{\frown}{AB}$, a da je upisan u ACB. $\sphericalangle AOB$ je odgovarajući centralni ugao. Na drugoj slici uočimo periferiski $\sphericalangle ACB$ poluprečnik AO i tangentu u A na kružnicu. $\sphericalangle BAt$ zove se granični periferiski ugao nad istim lukom $\overset{\frown}{AB}$. Svakom periferiskom uglu odgovara jedan centralni ugao, ali jednom centralnom uglu odgovara bezbroj periferiskih uglova

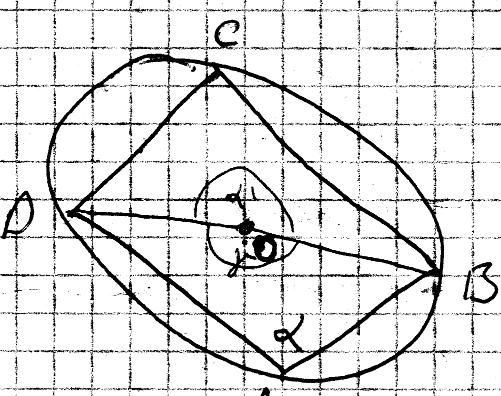
nad istim lukom. Centralni ugao koji odgovara periferskom uglu može biti manji od ravnog ugla, jednak ravnom uglu ili veći od ravnog ugla što zavisi od toga da li je odgovarajući označeni luk manji od polukružnice, jednak polukružnici ili veći od polukružnice.
Za periferski ugao kome odgovara ravan centralni ugao kažemo da je periferski ugao u polukružnici ili periferski ugao nad prečnikom.
<u>Osnovna teorema</u>: Periferski ugao kongruentan je polovini odgovarajućeg centralnog ugla.
<u>Dokaz</u>: Najprije ćemo posmatrati specijalan slučaj kad jedan krak periferskog ugla sadrži centar kružnice. Uočimo $\measuredangle ACB$ pri čemu centar O pripada duži CB. $\triangle AOC$ je jkk. a $\measuredangle AOB$ je vanjski ugao za taj trougao pa vrijedi: $\measuredangle AOB = \measuredangle OAC + \measuredangle OCA = 2 \cdot \measuredangle OCA$ tj. $2 \cdot \measuredangle ACB$ što je i trebalo dokazati.
Ako centar kružnice leži u unutrašnjoj oblasti $\measuredangle ACB$ onda uzmemo pravu <u>CO</u> koja siječe kružnicu u nekoj tački D. Sada je $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle BCD$. Za svaki od ovih uglova teorema je već dokazana u prvom dijelu.
Ako centar O leži izvan unutarnje oblasti $\measuredangle ACB$ onda imamo razliku uglova umjesto zbira i opet tvrdnja vrijedi.
-Neposredne <u>posljedice</u> su:
1° Periferski ugao je oštar, prav ili tup prema tome ako mu je odgovarajući centralni ugao

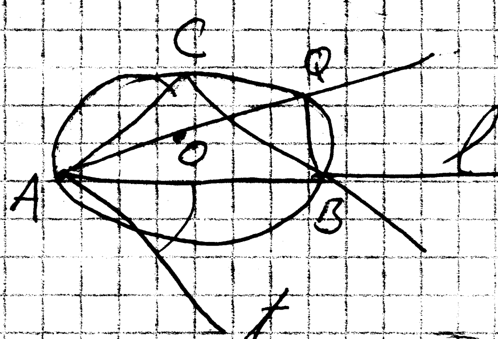
manji od ravnog ugla, jednak ravnom ili veći od ravnog ugla.

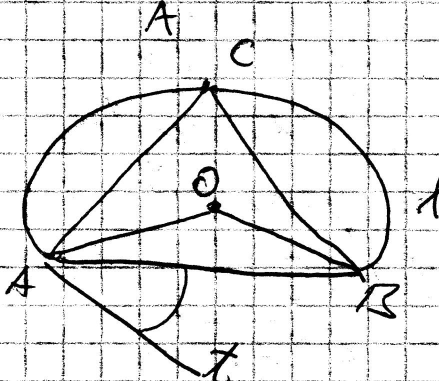
2° Ako se centar kružnice opisan oko Δ npr. ABC nalazi na jednoj stranici npr. na stranici AB onda je ugao u vrhu C pravi što znači da je ΔABC pravougli. Obrnuto ako je ΔABC pravougli npr. s pravim uglom u vrhu C onda ako upišemo kružnica oko tog Δ, ugao C je pravi ugao i on je periferiski ugao. Njemu odgovarajući centralni ugao je tada ravan što može biti samo ako centar O pripada stranici AB.

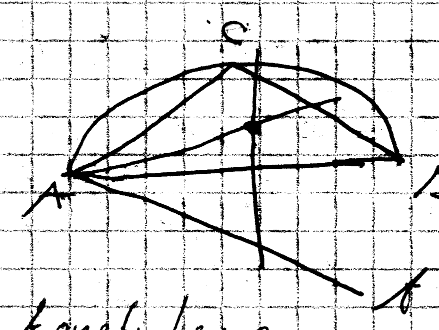
<u>Posledica 2°</u> kraće se iskazuje ovako: svaki periferiski ugao upisan u polukružnicu je pravi.

3° Dokazali smo da je svaki periferiski ugao podudaran polovini odgovarajućeg centralnog ugla. To implicira da su svi periferiski uglovi nad istim lukom podudarni.









konstrukcija

4° Četverougao čije su stranice tetive kružnice zove se tetivni četverougao. Uočimo tetivni □ ABCD i uglove α i γ u vrhovima A i C. ∢α je periferiski ugao koji je upisan u $\widehat{BAD}$ a nalazi se nad $\widehat{BCD}$. Njemu odgovarajući centralni ∢ je γ' i kao što znamo vrijedi $\gamma = \frac{1}{2}\gamma'$. α' i γ' čine puni ugao tj. dva ravna ugla. Zbog toga je zbir ∢α i γ jednak ravnom uglu. Kaže se da su naspremni uglovi tetivnog četverougla suplimentni.

5° ~~Teorema~~: granični periferiski ∢ kongruentan je periferiskom uglu nad istim lukom.

Najprije ćemo opravdati zonu granični i svaki periferiski ∢ACB ima istu veličinu u svakom položaju vrha C. Zamislimo da se vrh C stalno kreće po ~~normalnom~~ uočenom luku prema A tako da rastojanje između njih iščezava. Krak CB nastoji da zauzme položaj polupravc AB a krak CA nastoji da zauzme položaj pp t. Dakle ∢ $\overset{ACB}{CAB}$ teži ∢lt kad C teži A pri čemu je sa l označena pp $\vec{AB}$. Kaže se da je ∢lt granična vrijednost ∢ACB kad C → A. Kako ∢ACB ima stalnu vrijednost to i njegova granična vrijednost tj. limes ima tu istu vrijednost.

Dokaz teoreme: AO siječe kružnicu u tački Q. ∢ACB ≅ ∢AQB jer su to periferski uglovi nad istim lukom. Dalje AQ je prečnik kružnice pa je ∢ABQ pravi tj. AB ⊥ BQ. Prava A i C ⊥ AQ. Sada su ∢AQB i ∢BAt oštri uglovi

sa uzajamno normalnim kracima. Kao što znamo ti uglovi su podudarni (rotacija).
Ako su to pravi uglovi onda su oni podudarni kao dva prava ugla. Ako su tupi uglovi onda su njihovi naporedni uglovi oštri pa teorema vrijedi i u tom slučaju.
6° Treba riješiti zadatak: Konstruisati luk l čije su krajnje tačke A i B i u kome je upisani periferiski ugao podudaran datom uglu γ.
Analiza: Pretpostavimo da je zadatak riješen, tj. pretpostavimo da je l luk čije su krajnje tačke A, B i u kome je upisan periferiski $\sphericalangle ACB \cong$ datom uglu γ. Ako je O centar kružnice kojoj pripada luk l onda je $AO \cong BO$ pa tačka O pripada simetrali s duži AB. Neka je t tangenta u tački A na kružnicu. Prema tome tačka O pripada i normali ~~u~~ tački A na pravu t.

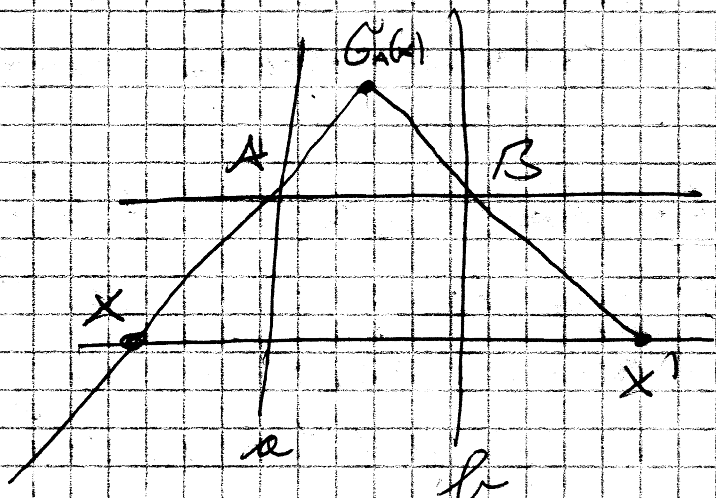
ostalo imam na početku ovog dana predavanja.

KRAJ 1. i 2. ČASA

NASTAVAK NA POČETKU

Translacija u euklidskoj ravni
-nastavak za sljedeće predavanje

Translacija u euklidskoj ravni



Definisali smo translaciju kao proizvod dvije osne simetrije sa osama iz istog hiperb. pramena pravih. U Euklidskoj ravni prave ~~elem.~~ hiperb. pramena su paralelne tako da je u Euklidskoj ravni hiperbolički pramen ~~pramen~~ pramen paralelnih pravih.

Dakle u euklidskoj ravni translacija je proizvod dvije osne simetrije sa paralelnim osama. Svaka prava normalna na jednu osu normalna je i na drugu pa je ~~invarijantna~~ dvojna prava pri translaciji. Dakle postoji skup paralelnih pravih čiji je svaki element dvojna prava translacije. Taj skup je pravac translacije. Također smo dokazali da je translacija određena uređenom dvojkom tački i da dvije uređene dvojke određuju translaciju ako su kolinearne sa bazisnom pravom odgovarajućim hiperbolički pramenom a odgovarajuće duži su podudarne.

isto orijentisane. U Euklidskoj ravni hiperbolički pramen ima bezbroj baznih pravih što ima za posljedicu da uređene dvojke koje određuju istu translaciju mogu biti nekolinearne.

<u>Dokaz</u>: Uočimo translaciju $\tau = \sigma_b \circ \sigma_a$, neka je X proizvoljna tačka i $X' = \tau(X)$. Neka je p jedna normala pravih a, b, $\{A\} = a \cap p$ i $\{B\} = b \cap p$. Kao što znamo tada je $\tau = \sigma_A \circ \sigma_B$ pa uočimo $\triangle XX'\sigma_A(X)$. U $\triangle XX'\sigma_A(X)$ tačke A i B su središta dviju stranica $\triangle$ pa je onda $AB = \frac{1}{2}(XX')$ i takođe je $AB \parallel XX'$, $(A,B) \uparrow\uparrow (XX')$. I za neku proizvoljnu tačku Y vrijedi $AB = \frac{1}{2}(YY')$, $AB \parallel YY'$,

$Y' = \tau(Y)$ $\qquad (AB) \uparrow\uparrow (YY')$

Prema tome za dvije proizvoljne tačke X i Y ravni je

$$X\tau(X) = Y\tau(Y)$$
$$X\tau(X) \parallel Y\tau(Y)$$
$$(X, \tau(X)) \uparrow\uparrow Y\tau(Y)$$

<u>Obratno</u>: Neka su date dvije duži XX', YY' tako da je

(1) $XX' \cong YY'$

(2) $XX' \parallel YY'$

(3) $XX' \uparrow\uparrow YY'$

Na već poznat način pokaže se da postoji relacija τ tako da je $X' = \tau(X)$ a $Y' = \tau(Y)$. Prema tome i ovdje vrijedi <u>teorema</u>:

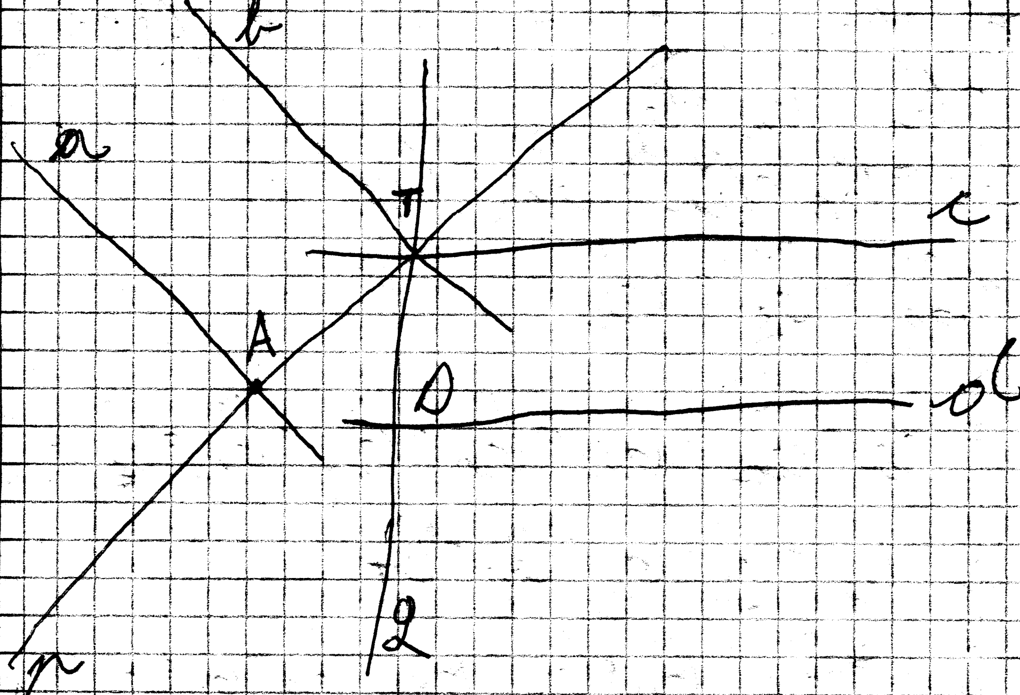
T: Translacija je određena uređenom dvojkom tačaka. Dvije uređene dvojke (XX'), (YY') određuju istu translaciju ako su zadovoljeni uslovi 1, 2 i 3.

<u>Definicija</u>: Za dvije uređene dvojke (XX') i (YY')

kažemo da su u relaciji teta $(XX')\,\Theta\,(YY')$ ako su zadovoljeni uslovi (1), (2) i (3). Svaka od relacija (1), (2) i (3) je relacija ekvivalencije pa je Θ relacija ekvivalencije. Ona u skupu $\mathcal{S}$ svih uređenih dvojki tačaka jedne ravni određuje particiju na klase ekvivalencije. Zbog toga je prirodno da posmatramo kvocijentni skup $\mathcal{S}/\Theta$ skupa $\mathcal{S}$ s obzirom na relaciju teta. Uvedemo oznaku $\mathcal{V} = \mathcal{S}/\Theta$

Definicija Element skupa $\mathcal{V}$ je vektor.

Vektor je dakle skup svih uređenih dvojki tačaka koje su ekvivalentne s obzirom na Θ. I translacija je klasa ekvivalencije u skupu svih uređenih dvojki tačaka u odnosu na istu relaciju ekvivalencije. Vrijedi dakle translacija je vektor i vektor je translacija. Uređena dvojka (A,B) je jedna reprezentacija vektora ili reprezentacija translacije tj. reprezentacija svih onih uređenih dvojki tačaka koje su ekvivalentne u odnosu na Θ. Tu reprezentaciju obilježavamo sa $\overrightarrow{AB}$. Sve što je tačno za $\overrightarrow{AB}$ tačno je i za odgovarajući vektor, pa ćemo se na $\overrightarrow{AB}$ pozivati kao na vektor. Vektor označavamo sa $\vec{a}, \vec{b}$ a odgovarajuću translaciju $\tilde{C}_{\vec{a}}$. Kad smo govorili o skupu orjentisanih uglova dokazali smo da se taj skup može snabdjeti algebarskom strukturom. Dokazat ćemo da se i skup $\mathcal{V}$ odnosno skup svih vektora tj. translacije također može snabdjeti algebarskom strukturom. Dokazat ćemo da se skup T odnosno skup svih vektora tj. translacija također može snabdjeti algebarskom strukturom. No najprije ćemo dokazati da vrijedi:



a) proizvod dvije translacije je translacija

b) proizvod dvije rotacije je rotacija čiji je centar neka treća tačka ili je translacija.

c) za svake tri tačke A, B, C postoji D tako da

$$\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D$$

Dokaz:

a) Uočimo translacije $\tau_1 = \sigma_b \circ \sigma_a$ i $\tau_2 = \sigma_d \circ \sigma_c$

Ako se dogodi da je $b \parallel c$ onda su prave a, b, c i d elementi istog hiperboličkog pramena pravih pa je $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a = \sigma_p$ gdje je p element istog pramena. Zbog toga vrijedi

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \sigma_d \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_d \circ \sigma_p = \tau .$$

Neka b i c nisu paralelne. Tada se one sijeku u nekoj tački T. Neka je p prava koja sadrži tačku T i $p \perp b$. Pošto je $a \parallel b$ to je $p \perp a$. Ako je $\{A\} = p \cap a$ onda je

$\tilde{G}_A = \tilde{G}_p \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_a \circ \tilde{G}_p$. Neka je q prava koja sadrži tačku T i normalna je na pravu c. Pošto je $c \parallel d$ to je $q \perp d$. Ako je $\{D\} = d \cap q$ imamo $\tilde{G}_D = \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_d = \tilde{G}_d \circ \tilde{G}_q$

Također je $\tilde{G}_T = \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_p = \tilde{G}_p \circ \tilde{G}_b$ i

$$\tilde{G}_T = \tilde{G}_c \circ \tilde{G}_q = \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_c$$

Sada je $\tau_1 = \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_p \circ \tilde{G}_p \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_T \circ \tilde{G}_A$

$$\tau_2 = \tilde{G}_d \circ \tilde{G}_c = \tilde{G}_d \circ \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_c = \tilde{G}_D \circ \tilde{G}_T$$

odavde je $\tau_2 \circ \tau_1 = \tilde{G}_d \circ \tilde{G}_c \circ \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_D \circ \tilde{G}_T \circ \tilde{G}_T \circ \tilde{G}_A$

b) Uočimo rotacije $\rho_{A,\hat{\alpha}}$ i $\rho_{B,\hat{\beta}}$ i pravu AB označimo sa e. Dokazali smo teoremu:

T: Rotacija je određena uređenim parom pravih od kojih se jedna u pramenu čiji je centar centar rotacije može proizvoljno izabrati.

Zbog toga se uočene rotacije mogu prikazati:

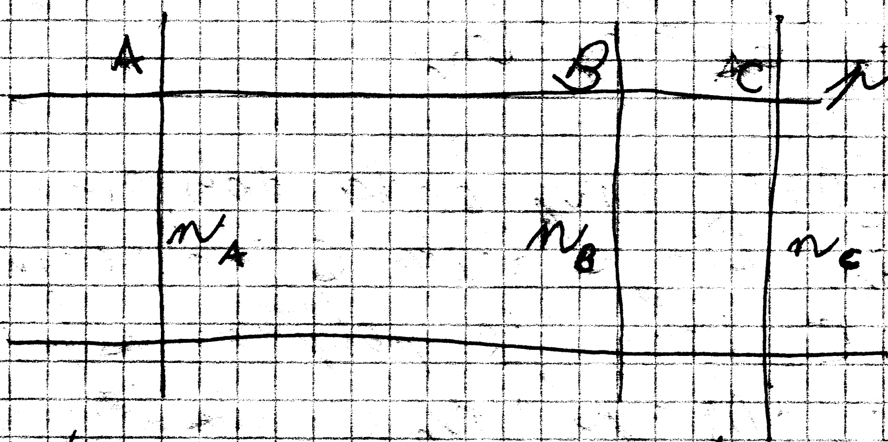
$$\rho_{A,\hat{\alpha}} = \tilde{G}_e \circ \tilde{G}_a$$
$$\rho_{B,\hat{\beta}} = \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_e$$

Prema tome je prava a element pramena pravih sa centrom u tački A koji je potpuno određen rotacijom $\rho_{A,\hat{\alpha}}$ i pravom e. Prava b je element pramena pravih sa centrom u B a koji je potpuno određen rotacijom $\rho_{B,\hat{\beta}}$ i pravom e.

Prema tome je $\rho_{B,\hat{\beta}} \circ \rho_{A,\hat{\alpha}} = \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_e \circ \tilde{G}_e \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_a$

Ako se prave a i b sijeku u nekoj tački C onda je $\sigma_b \circ \sigma_c = \rho_C, \hat{\alpha} + \hat{\beta}$

Ako su prave a i b paralelne onda je $\sigma_a \circ \sigma_a = \tau$



c.) Neka su A, B, C proizvoljne tačke i pretpostavimo da tačka C nije kolinearna sa tačkama A i B. Pravu A i B označimo sa p a sa q označimo pravu koja sadrži tačku C i paralelna je p. Neka su n_A, n_B i n_C prave koje sadrže redom tačke A, B i C i normalne su na pravu p odnosno na pravu q.

Tada je:
$$\sigma_C = \sigma_q \circ \sigma_{n_C} = \sigma_{n_C} \circ \sigma_q$$

$$\sigma_B = \sigma_{n_B} \circ \sigma_p = \sigma_p \circ \sigma_{n_B}$$

$$\sigma_A = \sigma_{n_A} \circ \sigma_p = \sigma_p \circ \sigma_{n_A}$$

Odavde dobijamo: $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_{n_C} \circ \sigma_q \circ \sigma_{n_B} \circ \sigma_p$
$$\circ \sigma_p \circ \sigma_{n_A} = \sigma_q \circ \sigma_{n_C} \circ \sigma_{n_B} \circ \sigma_{n_A}$$

Prave n_A, n_B i n_C su elementi istog pramena pravih pa je proizvod $\sigma_{n_C} \circ \sigma_{n_B} \circ \sigma_{n_A} = \sigma_{n_D}$

gdje prava n_0 pripada istom pramenu tj. paralelna je sa pravim n_A, n_B i n_C a normalna je na prave p i q. Otuda je

$$\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_q \circ \sigma_{n_0}$$

Ako stavimo $\{O\} = q \cap n_0$ onda dobijamo da je: $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_O$. Ako je tačka C kolinearna sa tačkama A i B dokaz je potpuno isti, samo sada imamo $\{O\} = p \cap n_0$.

PRIMJEDBA:

Iz $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D$ dobijamo $\sigma_C \circ \sigma_B = \sigma_D \circ \sigma_A$

Ako je $\tau_1 = \sigma_C \circ \sigma_B$ a $\tau_2 = \sigma_D \circ \sigma_A$ onda je $\tau_1 = \tau_2$ a za vektore $\vec{BC}$ i $\vec{AD}$ vrijedi:

duž $BC \cong AD$

prave $BC \parallel AD$

i uređene duži $(B, C) \uparrow\uparrow (A D)$ odavde $\Rightarrow$

$\square ABCD$ - paralelogram. Pretpostavimo da je četverougao $ABCD$ paralelogram tada je

$BC \cong AD$

$BC \parallel AD$

$(BC) \uparrow\uparrow (AD)$ dobijamo $\vec{BC} = \vec{AD}$

Ako je $\tau_1 = \sigma_C \circ \sigma_B$ a $\tau_2 = \sigma_D \circ \sigma_A$ sada je $\tau_1 = \tau_2$ tj. $\sigma_C \circ \sigma_B = \sigma_D \circ \sigma_A$ a otuda je $\sigma_C \circ \sigma_B = \sigma_A \circ \sigma_D$ posljednje možemo napisati kao: $\sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_B = \sigma_D$

Prema tome vrijedi tvrdnja:

T: Da bi $\square ABCD$ bio paralelogram potrebno je i dovoljno da bude $\sigma_D \circ \sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A = i$.

Definicija sabiranja u V:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ po definiciji znači $\tau_{\vec{c}} = \tau_{\vec{b}} + \tau_{\vec{a}}$

$\vec{c} = -\vec{a}$ ——————//—————— $\tau_{\vec{c}} = (\tau_{\vec{a}})^{-1}$

$\vec{c} = \vec{0}$ ——————//—————— $\tau_{\vec{c}} = i$

$\vec{c} = n \cdot \vec{a}$ ——————//—————— $\tau_{\vec{c}} = (\tau_{\vec{a}})^{n}$

Teorema: Sabiranje u skupu V zadovoljava ove uslove:

a) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

b) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

c) $a + b = b + a$

d) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Dokaz: Osobina a) i b) su neposredne posljedice date definicije. Uslov d) je neposredna posljedica asocijativnosti proizvoda preslikavanja. Dokazat ćemo osobinu c):
Treba dakle dokazati $\tau_{\vec{a} + \vec{b}} = \tau_{\vec{b} + \vec{a}}$. Ako je

$\tau_{\vec{a}} = \sigma_B \circ \sigma_A$ onda kao što znamo $\tau_{\vec{b}}$ možemo napisati $\tau_{\vec{b}} = \sigma_C \circ \sigma_B$

Sada je $\tau_{\vec{a} + \vec{b}} = \tau_{a} \circ \tau_{a} = \sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_B \circ \sigma_A =$

$= \sigma_C \circ \sigma_A = \sigma_B \circ \sigma_B \circ \sigma_C \circ \sigma_A$

Proizvod tri centralne simetrije je centralna simetrija.
Centralna simetrija je involucija pa vrijedi

$$\sigma_B \circ \sigma_C \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_B \quad (*)$$

Sada je $\tau_{\vec{a} + \vec{b}} \overset{*}{=} \sigma_B \circ \sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_B = \tau_{\vec{a}} \circ \tau_{\vec{b}} = \tau_{\vec{b} + \vec{a}}$

Svaka reprezentacija vektora $\vec{a}$ određuje duž. Sve te duži s obzirom na relaciju „je podudarno" pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Zbog toga je pri mjerenju u datom sistemu mjerenja odgovara isti broj. Taj broj se zove apsolutna vrijednost vektora $\vec{a}$, označava $|\vec{a}|$. Sve reprezentacije vektora $\vec{a}$ pripadaju paralelnim pravim. Skup svih među sobom paralelnih pravi je pravac. Taj pravac se zove pravac vektora $\vec{a}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su paralelni ako imaju isti pravac. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva paralelna vektora, i neka su uređene dvojke (AB), (CD) njihove reprezentacije. Pošto su prave AB, CD ~~paralelne~~ to za uređene dvojke AB, CD zadovoljena je jedna od sljedeće dvije relacije

$(AB) \uparrow\uparrow (CD)$ nije $((A,B) \uparrow\uparrow (C,D))$. U prvom slučaju kažemo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ isto orjentisane ili imaju isti smjer, a u drugom vektori a i b imaju suprotnu orjentaciju ili suprotan smjer.

Definicija:

Proizvod $k \cdot \vec{a}$ gdje je k - realan broj a $\vec{a}$ vektor je vektor koji je paralelan vektoru $\vec{a}$ čija je apsolutna vrijednost $= |k| \cdot |\vec{a}|$, koji je istog smjera kao $\vec{a}$ ako je $k>0$ a suprotnog smjera ako je $k<0$.

Razmjera dva vektora istog pravca je realan broj koji je > 0 ako bi vektori imaju istu orijentaciju a manji od a $a < 0$ ako bi vektori imaju suprotnu orijentaciju.

Razmjera se označava $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = k$

Apsolutna vrijednost razmjere jednaka je razmjeri apsolutnih vrijednosti.

$$\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Ako je AB reprezentacija od $\vec{a}$ a $\vec{CD}$ od $\vec{b}$ onda $\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = k$

Iz prethodnog je očito: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ onda je

$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = k$ i obrnuto.

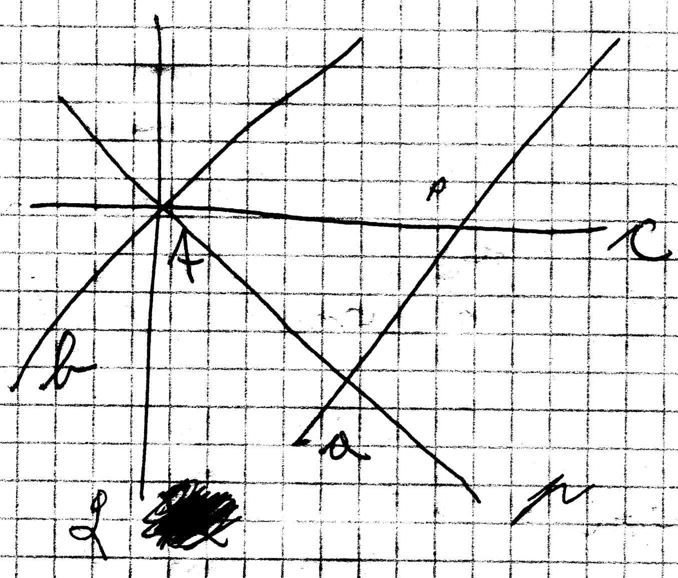
PRIMJEDBA: Ako je $\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = k$ onda je $\frac{m(AB)}{m(CD)} = |k|$

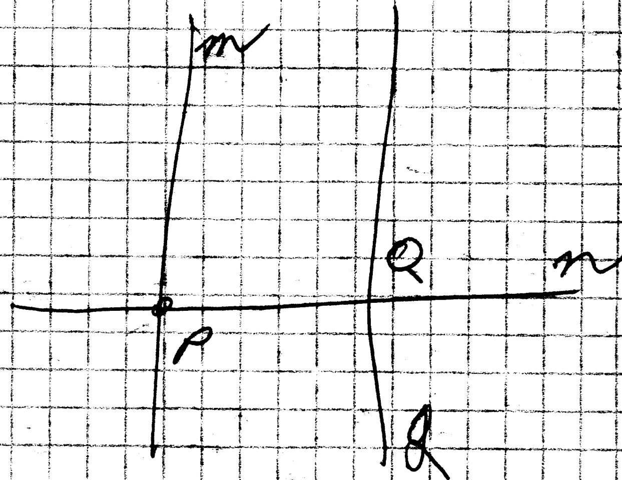
no dok razmjera za dvije duži uvijek postoji razmjera vektora definiše se samo za paralelne vektore.

KLIZNA (pomjerena) simetrija

Naprijed smo dokazali teoremu:
Proizvod tri osne simetrije čije ose pripadaju istom pramenu je osna simetrija. Njena osa je element istog pramena.
Sada ćemo proizvod $\tilde{G}_e \circ \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_a$ posmatrati u ostalim slučajevima.
Neka prave a, b, c ne pripadaju istom pramenu. Tada bar dvije od njih nisu paralelne pa pretpostavimo da su a i b ~~ne~~ paralelne a prava c ih siječe.
Neka je $\{A\} = b \cap c$ i p prava koja sadrži A i normalna na pravu a.
Sada su prave b, c i p elementi istog eliptičkog pramena pravih pa je $\tilde{G}_c \circ \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_p = \tilde{G}_q$ element istog pramena. Odavde je: $\tilde{G}_c \circ \tilde{G}_b = \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_p$ odnosno
$$\tilde{G}_c \circ \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_p \circ \tilde{G}_a$$
Pošto su a i p uzajamno ⊥ to ako stavimo $\{P\} = a \cap p$ imamo $\tilde{G}_p \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_P$.
Sada je $\tilde{G}_c \circ \tilde{G}_b \circ \tilde{G}_a = \tilde{G}_q \circ \tilde{G}_P$. Tada je dokazana sljedeća teorema:
Proizvod tri osne simetrije čije ose ne pripadaju istom pramenu pravih, ekvivalentan je proizvodu jedne centralne i jedne osne simetrije.

Σ - sigma





Primjedba:

Primjetimo da je svaka centralna simetrija proizvod dvije osne simetrije pri čemu su ose uzajamno normale i svaka sadrži centar simetrije. Dakle $\check{G}_P$ možemo napisati u obliku

$\check{G}_P = \check{G}_m \circ \check{G}_n$. Prave m i n uvijek možemo izabrati tako da bude $m \parallel q$ i $n \perp q$. Ako stavimo $\{Q\} = n \cap q$ odavde dobijemo $\check{G}_c \circ \check{G}_b \circ \check{G}_a = \check{G}_q \circ \check{G}_m \circ \check{G}_n = \check{\tau}_{\vec{a}}$ tako, o $\overrightarrow{PQ} \parallel n$ te je pravac n pravac translacije, tako imamo sljedeću definiciju:

Proizvod osne simetrije $\check{G}_n$ i translacije $\tau_{\vec{a}}$ tako da je pravac n pravac translacije zove se klizna ili pomjerena simetrija. Označava se ovako $\mathcal{H}_{\vec{a}, n}$. Posljednju teoremu sada možemo iskazati ovako: proizvod tri osne simetrije čije ose ne pripadaju istom pramenu je klizna simetrija. Pa je:

1) $\tilde{\tau}_{\vec{a}} = i$ što će biti kad je $\vec{a} = \vec{0}$

onda je

$$\tilde{\sigma}_e \circ \tilde{\sigma}_a \circ \tilde{\sigma}_a = \tilde{\sigma}_m$$

2) Dokažimo da je proizvod $\tilde{\tau}_{\vec{a}} \circ \tilde{\sigma}_m$ komutativan

zaista:

$$\tilde{\sigma}_e \circ \tilde{\sigma}_a \circ \tilde{\sigma}_a = \tilde{\sigma}_Q \circ \tilde{\sigma}_n \circ \tilde{\sigma}_m \text{ a to je}$$

$$= \tilde{\sigma}_n \circ \tilde{\sigma}_Q \circ \tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma}_n \circ \tilde{\tau}_{\vec{a}}$$

3.) Dokazali smo da je proizvod tri osne simetrije čije ose ne pripadaju istom pramenu jednak proizvodu jedne centralne simetrije i jedne osne simetrije, no vrijedi također da je taj proizvod jednak proizvodu jedne osne simetrije i jedne centralne simetrije. Naime, dokazali smo da je

$$\tilde{\sigma}_e \circ \tilde{\sigma}_a \circ \tilde{\sigma}_a = \tilde{\sigma}_n \circ \tilde{\sigma}_Q \circ \tilde{\sigma}_m = \tilde{\sigma}_Q \circ \tilde{\sigma}_m$$

U glavi tri dokazali smo da se svaka transformacija podudarnosti u ravni može prikazati kao proizvod najviše tri osne simetrije. Na osnovu rezultata te glave i dosad naznačenog gradiva možemo iskazati teoremu o klasifikaciji transformacija podudarnosti u ravni:

<u>Teorema</u>: transformacija podudarnosti u ravni je jedna od slijedećih transformacija:

1. identična transformacija
2. osna simetrija
3. centralna simetrija
4. rotacija
5. translacija
6. klizna simetrija.
Svaka od ovih transformacija je proizvod najviše dvije involucije.

~~Kl~~ Klasifikacija transformacija podudarnosti u prostoru

U dosadašnjim razmatranjima mi smo već prezentirali neke transformacije podudarnosti u prostoru. ~~Da~~li smo definiciju i osobine ravanske simetrije. Sad ćemo posmatrati proizvod sigma $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ dvije ravanske simetrije pri čemu se ravni α i β sijeku po nekoj pravoj p.

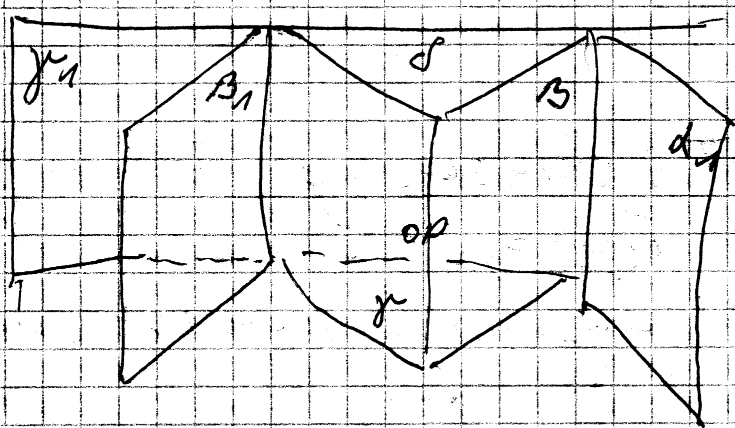
$\alpha \cap \beta = p$. Proizvod $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$, $\alpha \cap \beta = p$ je rotacija u prostoru ili rotacija oko ose. Označavamo je sa R_p gdje je p osa rotacije.

Ako je α ~~...~~ normalno na β $(\alpha \perp \beta)$ onda transformacija $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ je osna simetrija u prostoru i označava se sa Σ_p. Prava p je osa ~~rotacije~~ simetrije. Svaka tačka prave p je dvojna tačka transformacije Σ_p. Ako $A \notin p$ onda je $\Sigma_p(A)$ jednoznačno određena i prava p je simetrala duži $A\Sigma_p(A)$. Vrijedi teorema:

~~Teor.~~ Osna simetrija u prostoru određena je proizvoljnim parom normalnih ravni od kojih svaka sadrži osu simetrije.
Ako je $\alpha \mathcal{N} \beta$ onda je proizvod $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ translacija u prostoru i označava se sa T.
Prava koja je normalna na jednu ravan simetrije normalna je i na drugu pa je dvojna prava translacije. Postoji dakle skup paralelnih pravih čiji je svaki element dvojna prava translacije. Taj skup je pravac translacije.
Na potpuno isti način kao u ravni dokazuje se da vrijedi slijedeća teorema: Translacija je određena uređenom dvojkom tačaka.
Dvije uređene dvojke (X, X') i (Y, Y') određuju istu translaciju ako i samo ako su zadovoljeni uslovi:
(1) $XX' \cong YY'$
(2) $XX' \mathcal{N} YY'$
(3) $(X, X') \uparrow\uparrow (Y, Y')$
Isto kao u ravni dokazuje se da vrijedi ova teorema: Translacija je vektor i vektor je translacija. Neka su α, β i γ tri ravni od kojih su svake dvije normalne. Tada postoji tačka P koja je incidentna sa svakom od ovih ravni. Proizvod $\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha = \Sigma_P$ je centralna simetrija u prostoru i tačka P je centar simetrije. Tačka P je jedina dvojna tačka ovog preslikavanja. Ako je $A \neq P$ onda je $\Sigma_P(A)$ jednoznačno određena

tačka i centar P je središte duži $X\Sigma_P(X)$
Prema tome vrijedi sljedeća teorema:
Centralna simetrija u prostoru određena je sa tri proizvoljne ravni od kojih svaka sadrži centar simetrije i svake dvije su uzajamno normalne.
Definicija
Proizvod $R_p \circ T$ translacije T i rotacije R_p tako da je $T(p)=p$ tj. osa rotacije pripada pravcu translacije je rotaciona translacija.
Proizvod $T \circ \Sigma_\alpha$ ravanske simetrije Σ_α i translacije T tako da je $T(\alpha)=\alpha$ tj. ravan simetrije je dvojna ravan translacije je klizna simetrija u prostoru. Proizvod $R_p \circ \Sigma_P$ centralne simetrije Σ_P i rotacije R_p tako da je $P \in p$ tj. centar simetrije pripada osi rotacije je rotaciona simetrija. Moglo bi se očekivati da postoje mnogo složenije transformacije podudarnosti u prostoru no vrijedi sljedeća teorema o klasifikaciji transformacija podudarnosti u prostoru.
Teorema Transformacija podudarnosti u prostoru je jedna od sljedećih transformacija:
1. identična transformacija
2. ravanska simetrija
3. rotacija (u specijalnom slučaju osna simetrija u prostoru)
4. translacija

5. centralna simetrija
6. rotaciona translacija
7. klizna simetrija
8. rotaciona simetrija



Definicija: Transformacija koja je proizvod parnog broja proizvoljnih ravanskih simetrija je bez ustremna(?) odnosno podudarnosti prve vrste.

Transformacija koja je proizvod neparnog broja ravanskih simetrija je podudarnost druge vrste.

Definicija: Pramen ravni je skup ravni koje ili sadrže istu pravu ili su normalne na istoj pravoj. U prvom slučaju prava se zove osa pramena a u drugom slučaju radi se o pramenu paralelnih ravni. Teoreme koje odgovaraju dokazanim teoremama za ravan glase:

T. Proizvod tri ravanske simetrije čije ravni pripadaju istom pramenu je ravanska simetrija. Njena ravan je element istog pramena.

Teorema: Svaka transformacija podudarnosti u prostoru je proizvod od najviše četiri

ravanske simetrije. I. Za svaku ravan α i za svaku transformaciju podudarnosti π vrijedi
$\Sigma_{\pi(\alpha)} = \pi \circ \Sigma_\alpha \circ \pi^{-1}$

Teorema: Ako je π transformacija podudarnosti druge vrste a P proizvoljna tačka onda postoje ravni α, β, γ tako da je $P \in \beta \cap \gamma$ i $\pi = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$. Dokaz:

Po pretpostavci π je transformacija podudarnosti ~~prve~~ druge vrste pa je ona ili ravanska simetrija ili proizvod tri ravanske simetrije. Pretpostavimo najprije da je π ravanska simetrija tj. $\pi = \Sigma_\alpha$. Ravan β uvijek možemo izabrati tako da $P \in \beta$ i da vrijedi $\pi = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ pa je teorema u ovom trivijalnom slučaju dokazana.

Neka je $\pi = \Sigma_{\gamma_1} \circ \Sigma_{\beta_1} \circ \Sigma_{\alpha_1}$ gdje su ravni α_1, β_1 i γ_1 proizvoljne. Ravan μ ćemo odrediti tako da tačka $P \in \mu$ i da μ pripada pramenu koji je određen ravnima β_1 i γ_1. Dakle imamo $\pi = \Sigma_\mu \circ \Sigma_\mu \circ \Sigma_{\gamma_1} \circ \Sigma_{\beta_1} \circ \Sigma_{\alpha_1}$

Sada su ravni β_1, γ_1 i μ ravni koje pripadaju istom pramenu pa je njihov proizvod ravanska simetrija čija ravan pripada istom pramenu. Postoji dakle ravan δ ~~tako~~ takva da je $\Sigma_\mu \circ \Sigma_{\gamma_1} \circ \Sigma_{\beta_1} = \Sigma_\delta$. Sada je $\pi = \Sigma_\mu \circ \Sigma_\delta \circ \Sigma_{\alpha_1}$

Ravan β odredićemo tako da $P \in \beta$ i da β

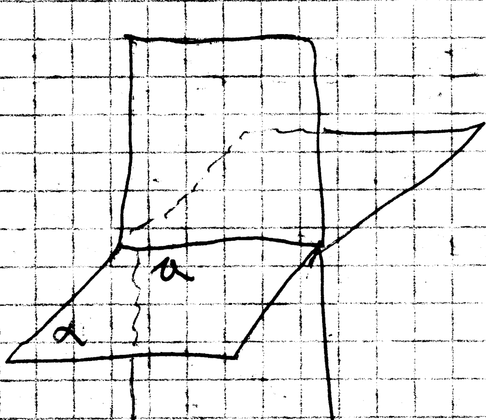
pripada pramena koji je određen ravnima δ i α_1. Dobijamo: $\Pi = \Sigma_\mu \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\delta \circ \Sigma_{\alpha_1}$

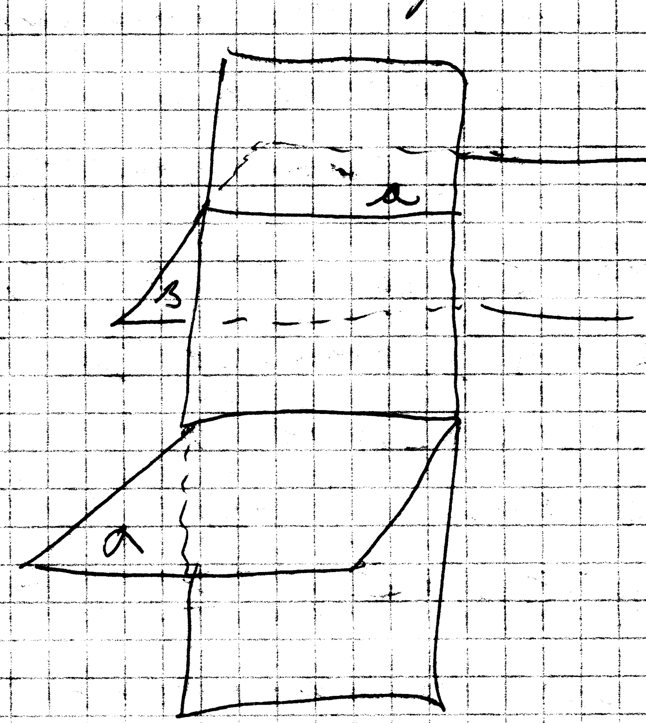
Ravni δ, β i α_1 pripadaju istom pramenu pa je proizvod $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\delta \circ \Sigma_{\alpha_1}$ jednak Σ_α pri čemu je α element istog pramena. Na taj način dobijamo da je $\Pi = \Sigma_\mu \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha$ što je i trebalo dokazati.

Neposredne posledice su: Ako je Π transformacija podudarnosti prve vrste a P tačka onda postoje osne simetrije Σ_a i Σ_a takve da je $\Pi = \Sigma_a \circ \Sigma_a$ i tačka P pripada pravoj b.

2. Ako je Π transf. pod. druge vrste a P tačka onda postoji osna simetrija Σ_a i ravanska simetrija Σ_α tako da je $\Pi = \Sigma_a \circ \Sigma_\alpha$, da tačka P pripada ravni α.

<u>Teorema:</u> Proizvod $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_a$ je ravanska simetrija ako $a \in \alpha$, klizna simetrija ako $a \parallel \alpha$ i treće rotaciona simetrija ako $a \cap \alpha = \{A\}$.





Dokaz: Neka $a \subset \alpha$. Uzmimo ravan β koja sadrži pravu a i normalna je na ravan α. Tada je $\Sigma_a = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta$. Odavde je $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_a = \underbrace{\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\alpha}_{} \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\beta$ što je i trebalo dokazati.

Neka je $a \parallel \alpha$, neka je β ravan koja sadrži pravu a i $\beta \parallel \alpha$ a γ ravan koja $a \subset \gamma$ a $\gamma \perp \alpha$. Tada je ravan γ normalna i na ravan β pa je $\Sigma_a = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$

Odavde je $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_a = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = T \circ \Sigma_\gamma$

što je i trebalo dokazati.

3. Neka se ravan α i prava a sijeku u nekoj tački A. Uzmimo sada ravni β, γ i δ tako da je:

β: $a \subset \beta$, $\beta \perp \alpha$

γ: $a \subset \gamma$, $\gamma \perp \beta$

δ: $A \in \delta$ i $\delta \perp \gamma$ i $\delta \perp \beta$

Uočimo tačka $A \in \alpha$ i $A \in \delta$ pa znači da postoji $\alpha \cap \delta = p$. Pošto je $\gamma \perp \beta$ a prava a pripada ravni β i γ to je $\Sigma_a = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$

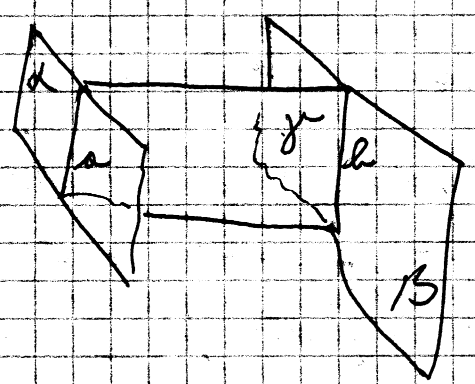
odavde je

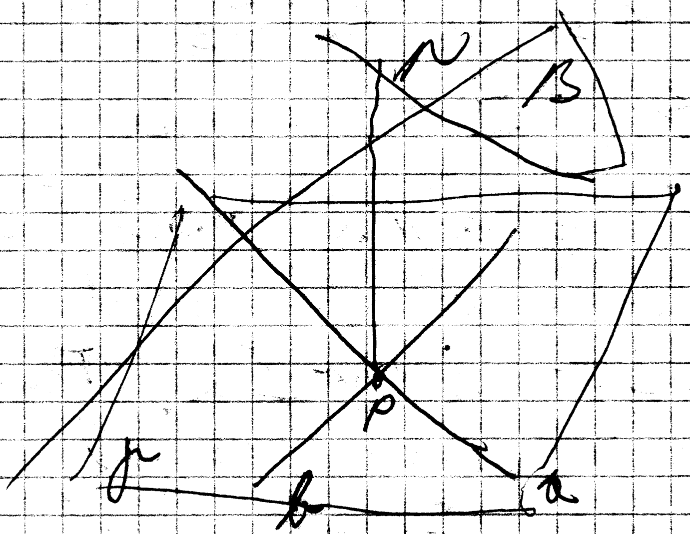
$$\Sigma_\alpha \circ \Sigma_a = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\delta \circ \Sigma_\delta \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta$$

Ravni β, γ i δ su tri ravni od koje su svake dvije normalne i svaka sadrži tačku A. Zbog toga je $\Sigma_\delta \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta = \Sigma_A$. ~~...~~

Pošto se ravni α i δ sijeku po pravoj uglom je bo je $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_{\mathcal{B}} = R_p \circ \Sigma_A$

Time je teorema dokazana.





<u>Teorema:</u> Proizvod $\Sigma_b \circ \Sigma_a \overset{=T}{}$ je translacija ako je $a \parallel b$, rotacija ako se prave a i b sijeku i rotacione translacije ako su prave a, b mimoilazne. <u>Dokaz:</u> Neka je $a \parallel b$. Dvije paralelne prave određuju ravan pa označimo sa μ ravan koji određuje prave a i b. Neka je α ravan koja sadrži prava a i normalna je na μ a $\mathcal{B}$ ravan koja sadrži pravu b i $\perp$ na μ, tada:

$$\Sigma_a = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\mu = \Sigma_\mu \circ \Sigma_\alpha$$

$$\Sigma_b = \Sigma_{\mathcal{B}} \circ \Sigma_\mu = \Sigma_\mu \circ \Sigma_{\mathcal{B}}.$$ Odavde dobijamo:

$$\Sigma_b \circ \Sigma_a = \Sigma_{\mathcal{B}} \circ \underbrace{\Sigma_\mu \circ \Sigma_\mu}_{\varepsilon} \circ \Sigma_\alpha = \Sigma_{\mathcal{B}} \circ \Sigma_\alpha = T$$

jer je $\alpha \parallel \mathcal{B}$,

Neka su sada prave a i b sijeku u nekoj tački P. Te dvije prave određuju neku ravan μ.

Neka je μ prava koja sadrži tačku A, i $\perp$ je ravan γ. Sada prave a, p određuju neku ravan α i pošto je $p \perp \gamma$, $p \subset \alpha$ to je $\alpha \perp \gamma$. Prave b ~~a~~ i p određuju neku ravan β i pošto je ~~...~~ $p \perp \gamma$, $p \subset \beta$ to je $\beta \perp \gamma$. Sada je $\Sigma_a = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\alpha$ a $\Sigma_b = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta$. Odavde dobijamo:

$$\Sigma_b \circ \Sigma_a = \Sigma_\beta \circ \underbrace{\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\gamma}_{I} \circ \Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha = R_p$$

jer ravni α i β sijeku se ~~po~~ po pravoj p.

Neka su sada prave a i b mimoilazne. ~~Mi~~ Smo dokazali da svake dvije mimoilazne prave pripadaju paralelnim ravnima i da za svake dvije mimoilazne prave postoji zajednička normala. Znači postoje ravni α i β tako da $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \parallel \beta$ i postoji prava p tako da je $p \perp a$ i $p \perp b$. No mi znamo da je tada $p \perp \alpha$ i $p \perp \beta$. Neka je γ ravan koja sadrži pravu a i p a δ ravan koja sadrži b i p. Sada je $\Sigma_a = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\alpha$ i $\Sigma_b = \Sigma_\delta \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\beta \circ \Sigma_\delta$. Odavde dobijamo

$$\Sigma_b \circ \Sigma_a = \Sigma_\delta \circ \underbrace{\Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha}_{T} \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\delta \circ T \circ \Sigma_\gamma =$$

$$\overset{(*)}{=} \Sigma_\delta \circ \Sigma_\gamma \circ T = R_p \circ T$$ jer se ravni γ i δ sijeku po pravoj p.

Treba da dokažemo (*) $T \circ \Sigma_{p} = \Sigma_{p} \circ T$.
Znamo da vrijedi teorema:
Za svaku transformaciju podudarnosti Π i za svaku ravan p je $\Sigma_{\Pi(p)} = \Pi \circ \Sigma_{p} \circ \Pi^{-1}$.
Ako je $\Pi = T$ onda je $\Sigma_{T(p)} = T \circ \Sigma_{p} \circ T^{-1}$
Ako su desne strane djelujemo sa T dobijemo $\Sigma_{T(p)} \circ T = T \circ \Sigma_{p}$

Kod nas ravan p sadrži elemente pravca translacije pa je $T(p) = p$, vrijedi
$\Sigma_{p} \circ T = T \circ \Sigma_{p}$

Primjetimo da posljedice dvije teoreme u potpunosti dokazuju teoremu o klasifikaciji podudarnosti transformacija podudarnosti u prostoru. Istina je da se u tim teoremama ne spominju identična transformacija i centralna simetrija. Međutim, identična transformacija je specijalan slučaj i rotacije $R_{p} = \Sigma_{\beta} \circ \Sigma_{\alpha}$, i translacije T $T = \Sigma_{\beta} \circ \Sigma_{\alpha}$ gdje je $\alpha = \beta$.
Centralna simetrija je specijalan slučaj rotacione simetrije kao je rotacija R_{p} i identična transformacija
$$R_{p} \circ \Sigma_{p} \quad R_{p}$$
Sljedeću teoremu dajemo bez dokaza:
Ako je Π trans. podud. druge vrste a I tačka onda postoji — Π prve vrste Π_1 tako da je $\Pi = \Sigma_{p} \circ \Pi_1$.